Controllo LQ robusto di un pendolo inverso

candidato: Matteo Tesori
relatore: Professor Luigi Chisci

Università degli studi di Firenze

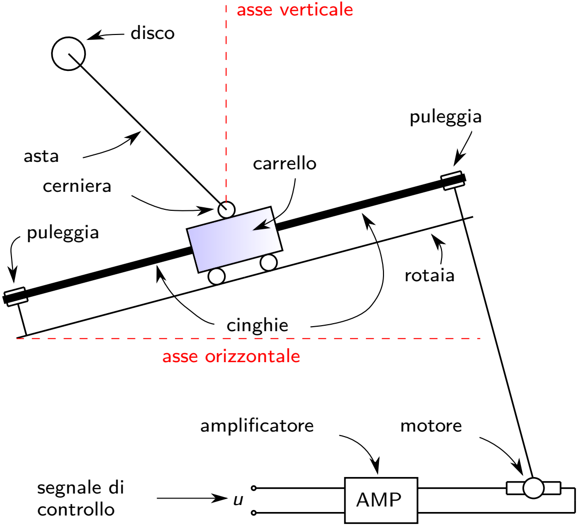
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni
curriculum Automatica

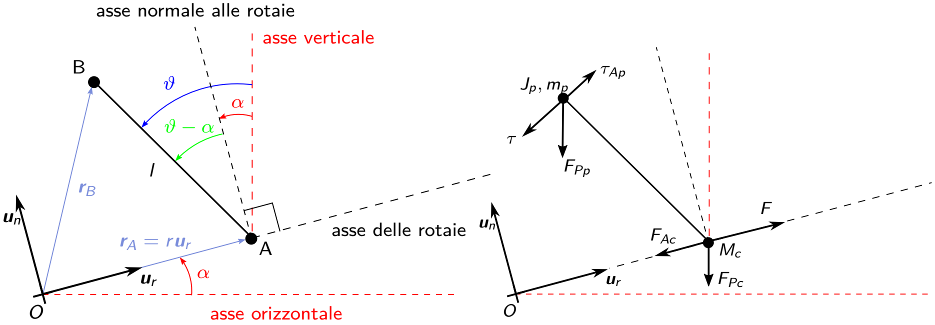
Firenze 20 aprile 2017

Processo controllato
Pendolo incernierato ad un carrello mobile.
Gradi di libertà:

- angolo di elevazione pendolo (ϑ)
- posizione carrello (r)

Obiettivo del controllo
Mantenere nel tempo il pendolo in posizione verticale agendo sul carrello





Dinamica descritta da una coppia di equazioni non lineari $\Rightarrow$ ipotesi semplificative

1. Stato del processo nell'intorno dell'equilibrio instabile
2. $\alpha \approx 0$

Dinamica diretta "linearizzata":

$$(M_c + m_p)\ddot{r} - m_p l\ddot{\vartheta} + (M_c + m_p)g\alpha + b\dot{r} + F_s\text{sign}(\dot{r}) = au$$

$$(J_p + m_p l^2)\ddot{\vartheta} - m_p l\ddot{r} - m_p g l\vartheta + c\dot{\vartheta} = \tau$$

Modello matematico

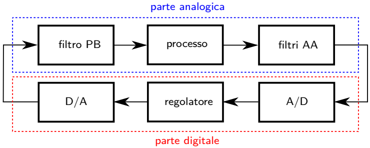
Rappresentazione di stato

$$x := \begin{bmatrix} r & \vartheta & \dot r & \dot\vartheta \end{bmatrix}^T \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\begin{aligned} \dot x &= Ax + B_u u + B_\alpha \alpha + B_\tau \tau + B_{F_s} F_s \mathrm{sign}(e_3^T x) \\ y &= Cx + D_\alpha \alpha \end{aligned}}$$

$$y := \begin{bmatrix} r & \vartheta - \alpha & \dot r \end{bmatrix}^T$$

Discretizzazione ZOH $x_k := x(t = kT)$

$$\boxed{\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi x_k + \Gamma_u u_k + \Gamma_\alpha \alpha_k + \Gamma_\tau \tau_k + N_k(e_3^T x_k; T) \\ y_k &= C x_k + D_\alpha \alpha_k \end{aligned}}$$



Anello di retroazione “ibrido”

ipotesi: u, α e τ costanti per tutta la durata durante gli intervalli di campionamento

$$\Phi = \exp(AT) \qquad \Gamma_i = \int_0^T \exp(A\sigma) B_i \, \mathrm{d}\sigma \quad \text{per } i = u, \alpha, \tau$$

$$N(e_3^T x_k; T) = \int_0^T \exp[A(T-\sigma)] B_{F_s} F_s \mathrm{sign}[e_3^T x(\sigma + kT)] \, \mathrm{d}\sigma$$

Processo aumentato

processo ridotto
$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi x_k + \Gamma_u u_k + \Gamma_\alpha \alpha_k + \Gamma_\tau \tau_k \\ y_k &= C x_k + D_\alpha \alpha_k \end{aligned}$$

modello interno
$$w_{k+1} := w_k + (e_1^T x_k - r_{sp})$$

modello completamente lineare (trascurato il disturbo non lineare)

$$x^a := \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x^a_{k+1} &= \Phi^a x^a_k + \Gamma^a_u u_k + \Gamma^a_r r_{sp} + \Gamma^a_\alpha \alpha_k + \Gamma^a_\tau \tau_k \\ y_k &= C^a x^a_k + D_\alpha \alpha_k \end{aligned}}$$

(Φ^a, Γ^a_u) raggiungibile

$\Rightarrow$ LQR
controllo intrinsecamente robusto

Problema LQ

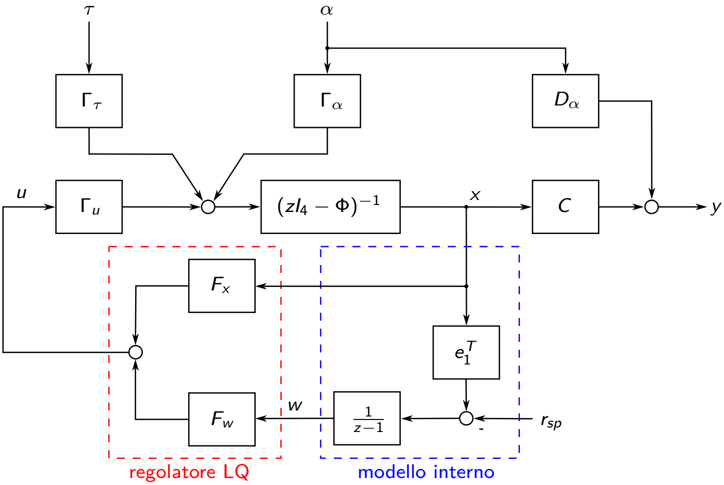
controllo ottimo LQ: $$\operatorname*{argmin}_u \sum_{k=0}^{\infty} x_k^{a\mathsf{T}} Q\, x_k^a + R u_k^2$$

$$\Rightarrow \boxed{u_k = \begin{bmatrix} F_x & F_w \end{bmatrix} x_k^a}$$

Soluzione sottoforma di retroazione statica dello stato del processo aumentato

ipotesi:
- $Q \neq 0_{5\times 5}, \geq 0$
- $R > 0$
- $(\Phi^a, \sqrt{Q})$ osservabile

dove
$$\begin{cases} P \geq 0 : P = \Phi^{a\mathsf{T}} P \Phi^a - \Phi^{a\mathsf{T}} P \Gamma^a_u (R + \Gamma_u^{a\mathsf{T}} P \Gamma^a_u)^{-1} \Gamma_u^{a\mathsf{T}} P \Phi^a + Q & \text{(ARE)} \\ \begin{bmatrix} F_x & F_w \end{bmatrix} = -(R + \Gamma_u^{a\mathsf{T}} P \Gamma^a_u)^{-1} \Gamma_u^{a\mathsf{T}} P \Phi^a & \text{(Guadagno ottimo)} \end{cases}$$



Schema di controllo a regolazione “statica”

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

$x_4^a = \dot{\vartheta}$ non disponibile

schema LQ non realizzabile

(Φ^a, C^a) osservabile

$\Rightarrow$ inserimento nell'anello di un osservatore del I ordine

Obiettivi del progetto dell'osservatore

- Stabilità interna dell'anello chiuso
- Asintoticità: $\lim_{k\to\infty} \|x - \hat{x}\|_1 = 0$
- Robustezza: pieno recupero dei margini di stabilità LQ (*Full LTR*)

Struttura dell'osservatore *robusto*

$$\boxed{\begin{aligned} v_{k+1} &= Ev_k + Hu_k + My_k \\ \hat{x}_k &= L_1 y_k + L_2 v_k \end{aligned}}$$

equazioni di stato di un generico osservatore

dove

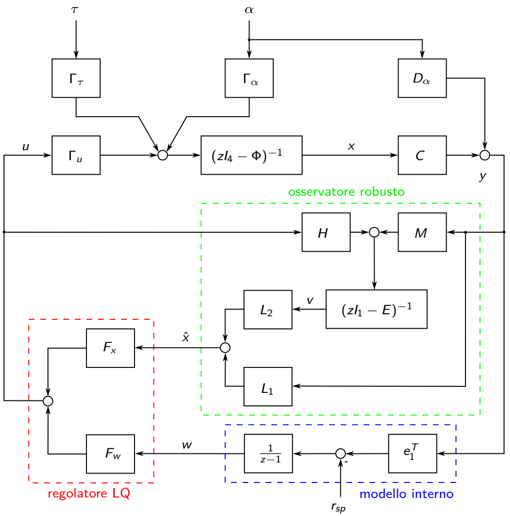
1. $T\Phi - ET - MC = 0_{1\times 4}$
2. $H = T\Gamma_u$
3. $\begin{bmatrix} L_1 & L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}^{-1}$
4. $T : \exists \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}^{-1}$

principio di separazione

$|E| < 1 \Rightarrow$ stabilità, asintoticità

assenza zeri invarianti

$H = 0 \Rightarrow$ robustezza



Schema di controllo a regolazione dinamica

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Problema di progetto

$$\begin{cases} T\Phi - ET - MC = 0_{1\times 4} \\ H = T\Gamma_u \\ \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}^{-1} \\ T : \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} = 4 \end{cases}$$

Algoritmo risolutivo

- **Passo 1** Fissare $|E| < 1, H = 0$
- **Passo 2** Determinare T, M (1a-2a eq.)
- **Passo 3** Determinare L_1, L_2 (3a eq.)

Dettaglio passo 2

5 equazioni in 7 incognite

$$\begin{bmatrix} \Phi^T - EI_4 & -C^T \\ \Gamma_u^T & 0_{1\times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^T \\ M^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{1\times 3} \\ H \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ aggiunta di una coppia di vincoli:

- invertibilità $[C^T \;\; T^T]^T$ (4a eq.)
- indipendenza SdC da $x_1^a = r$

7 equazioni in 7 incognite

$$\begin{bmatrix} \Phi^T - EI_4 & -C^T \\ \Gamma_u^T & 0_{1\times 3} \\ e_4^T & \\ e_5^T & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^T \\ M^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{1\times 3} \\ H \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sistema con una ed una sola soluzione

Compensatore non lineare
ipotesi: $\dot{r}$ costante per tutta la durata durante gli intervalli di campionamento

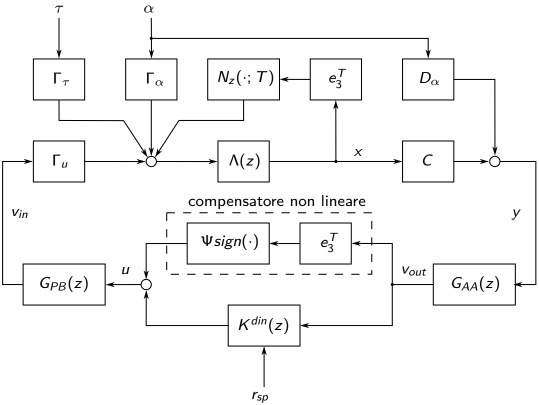
$$\Rightarrow u_k = \frac{F_s}{a}\text{sign}(\dot{r}_k)$$

reiezione totale del disturbo non lineare

- ipotesi non realistica
- F_s non noto
- presenza filtri

$$\Rightarrow u_k = \Psi\text{sign}(e_3^T v_{\text{out}_k})$$

reiezione parziale del disturbo non lineare



Schema di controllo definitivo

$$\Lambda(z) := (zI_4 - \Phi)^{-1} \qquad N_z := \mathcal{Z}[N_k]$$

filtri AA $G_{\text{AA}} := (zI_3 + a_{\text{out}}I_3)^{-1}a_{\text{out}}$ filtro PB $G_{\text{PB}} := (zI_1 + a_{\text{in}}I_1)^{-1}a_{\text{in}}$

regolatore LQO $K^{\text{din}} := F_x[L_1 + L_2(zI_1 - E)^{-1}M] + F_w e_1^T(z-1)^{-1}$

Gradi di libertà del progetto

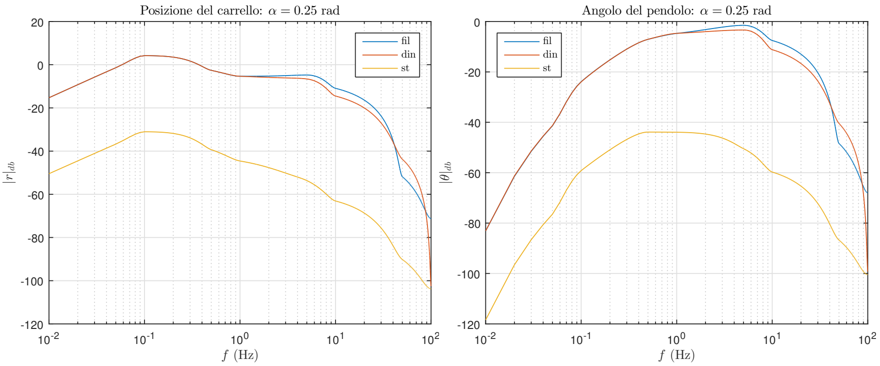
$T := 5$ ms	$\omega_T \geq 2\omega_b$
$Q := \text{diag}(10 \quad 2000 \quad 2 \quad 2.5 \quad 0.001)$ $R := 0.1$	compromesso tra prontezza e stabilità/consumi di potenza
$E = 0.9$ rad/s	compromesso tra prontezza e sensitività ai disturbi
$\Psi := 0.5$ V	$\approx F_s/a$ ipotizzando $F_s = 5$ N

Pulsazioni di taglio filtri

$$a_{\text{in}} := 259.4707 \text{ rad/s}$$
$$a_{\text{out}} := 227.2727 \text{ rad/s}$$

scelta effettuata in modo da avere un'accettabile degradazione dei margini stabilità caratterizzanti il controllo LQ

	senza filtri (LQ/LQO)	con filtri (LQOF)
margine di fase	68°	45°
margini di guadagno	0.2481 8.9231	0.3977 4.5288

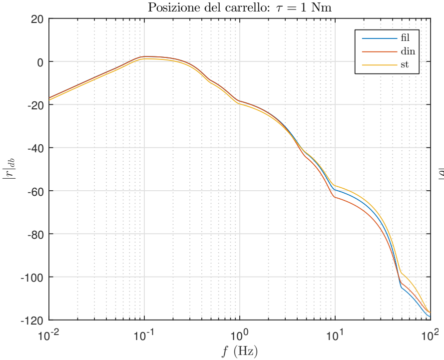


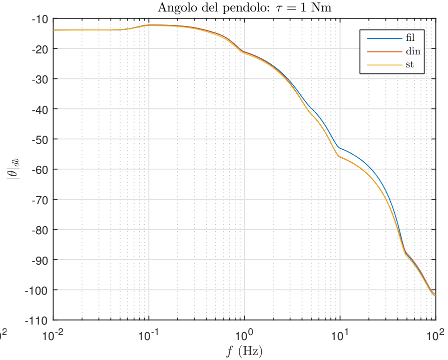
legenda: st, din, fil $\Leftrightarrow$ LQ, LQO, LQOF

Netto effetto negativo da parte dell'osservatore

Effetto dei filtri trascurabile rispetto all'effetto dell'osservatore

Reiezione dei disturbi: disturbo di coppia





legenda: st, din, fil $\Leftrightarrow$ LQ, LQO, LQOF

Risposte praticamente indistinguibili

Controllo dell'errore di energia $\tilde{\mathcal{E}} := \mathcal{E} - \mathcal{E}_{\text{instab}}$ (ipotesi: $\alpha \approx 0$)

- $\mathcal{E} = \frac{1}{2}(J_p + m_p l^2)\dot{\vartheta}^2 + m_p g l \cos\vartheta$, energia meccanica del pendolo priva del termine cinetico traslazionale, trascurato a favore del termine cinetico rotazionale
- $\mathcal{E}_{\text{instab}} = m_p l g$, energia meccanica del pendolo all'equilibrio instabile

$$u : \dot{\tilde{\mathcal{E}}} = -\gamma|\dot{\vartheta}\cos\vartheta|\text{sat}_{\beta g}(k\tilde{\mathcal{E}}) \qquad \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \tilde{\mathcal{E}} = 0 \text{ per } k, \beta > 0 \qquad (\gamma \text{ costante positiva})$$

- Controllo di tipo bang-bang per grandi errori di energia (fase inziale dello swing up)
- Controllo di tipo proporzionale per piccoli errori di energia (intorno equilibrio instabile)

Osservatore non lineare

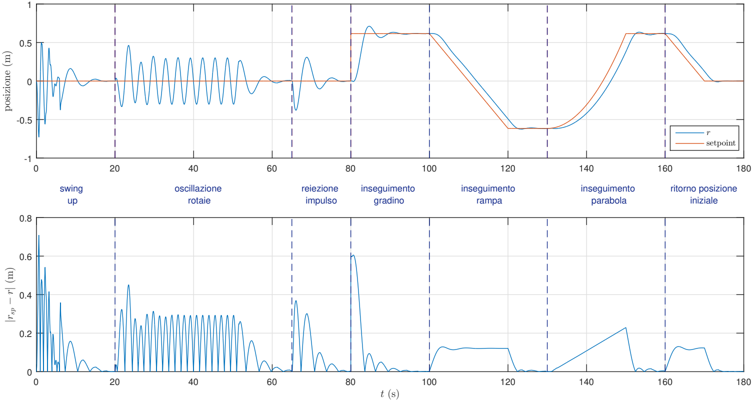
Velocità angolare del pendolo ricostruita tramite un filtro derivativo analogico

$$G_{\text{der}}(s) = k_\tau \frac{1}{1 + k_\tau / s} \qquad \text{con } k_\tau \to \infty$$

Limitatore

Lunghezza rotaie finita $\Rightarrow$ penalizzazione posizioni prossime ai fine corsa

$$\text{limitatore} : k_{\text{lim}}\text{sign(r)}\log(1 - |r|/R) \qquad R = 0.75 \text{ m} \quad (\text{semilunghezza rotaie})$$



errore di inseguimento a regime

- nullo al gradino
- limitato alla rampa
- illimitato alla parabola

$$\alpha = 0.075 \sin(2t)[1(t-20) - 1(t-20+10\pi)] \text{ rad}$$

$$\tau = [1(t-65) - 1(t-65.5)] \text{ Nm} \approx \delta(t-65) \text{ Nm}$$

G.A.Medrano-Cerda (1999)
Robust Computer Control of an Inverted Pendulum
IEEE Control Systems Magazine, vol. 19, no. 3, pp. 58 - 67.

K. J. Åström, K. Furuta (1996)
Swinging up a pendulum by energy control
IFAC 13th World Congress.

D. Chatterjeea, A. Patraa, H. K. Joglekar (2002)
Swing-up and stabilization of a cart–pendulum system under restricted cart track length
Systems & Control Letters, no. 47, pp. 355 – 364.