



**Università degli Studi di Firenze**

---

SCUOLA DI INGEGNERIA

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni

## **Controllo LQ robusto di un pendolo inverso**

Robust LQ control of an inverted pendulum

Candidato:

**Matteo Tesori**

Matricola 5136705

Relatore:

**Prof. Luigi Chisci**



# Indice

<b>Elenco delle figure</b>	<b>iii</b>
<b>Sommario</b>	<b>iv</b>
<b>Introduzione</b>	<b>v</b>
Descrizione qualitativa del processo . . . . .	v
Interfaccia computer-processo . . . . .	v
Robustezza e reiezione dei disturbi . . . . .	vi
Controllo stabilizzante e swing up del pendolo . . . . .	vii
<b>1 Modellistica</b>	<b>1</b>
1.1 Descrizione geometrica del processo . . . . .	1
1.2 Descrizione dinamica del processo . . . . .	2
1.3 Lagrangiana . . . . .	3
1.4 Equazioni del moto . . . . .	4
1.5 Rappresentazione di stato ridotta . . . . .	5
1.6 Rappresentazione di stato estesa . . . . .	7
1.7 Discretizzazione . . . . .	8
1.8 Dominio della frequenza . . . . .	9
1.9 Forma numerica del processo TC . . . . .	10
1.10 Forma numerica del processo TD . . . . .	11
<b>2 Controllo</b>	<b>13</b>
2.1 Modello interno . . . . .	13
2.2 Regolazione LQ . . . . .	15
2.3 Progetto del regolatore LQ . . . . .	15
2.4 Osservatore robusto . . . . .	17
2.5 Asintoticità dell'osservatore robusto . . . . .	18
2.6 Stabilità interna della regolazione dinamica . . . . .	19
2.7 Loop transfer recovery (LTR) . . . . .	20
2.8 Progetto dell'osservatore robusto . . . . .	22
2.9 Progetto dei filtri PB e AA . . . . .	24
2.10 Compensazione dell'attrito coulombiano . . . . .	25
2.11 Swing-Up . . . . .	26
2.12 Osservatore non lineare . . . . .	27
2.13 Commutatore . . . . .	28
2.14 Limitatore . . . . .	28

<b>3</b>	<b>Analisi</b>	<b>29</b>
3.1	Robustezza . . . . .	29
3.2	Sensitività ai disturbi . . . . .	31
3.3	Reiezione dei disturbi . . . . .	33
3.4	Attrito di Coulomb . . . . .	36
3.5	Prestazioni e consumi . . . . .	38
3.6	Stress Test . . . . .	40
3.7	Confronto delle risposte dei sistemi di controllo . . . . .	40
3.8	Simulazione dimostrativa . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>42</b>
<b>A</b>	<b>Simulazione in ambiente Simulink®</b>	<b>43</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>48</b>

# Elenco delle figure

1	Schema del processo pendolo-carrello e meccanismo di attuazione . . . . .	v
2	Diagramma qualitativo dell'anello di controllo . . . . .	vi
1.1	Geometria del processo . . . . .	1
1.2	Dinamica del processo . . . . .	2
1.3	Schema a blocchi del processo ridotto . . . . .	9
1.4	Schema a blocchi del processo esteso . . . . .	10
1.5	Confronto risposte impulsive TC, TD . . . . .	12
2.1	Schema a blocchi del processo semplificato . . . . .	13
2.2	Schema a blocchi del processo aumentato . . . . .	14
2.3	Schema a blocchi del sistema di controllo a regolazione statica LQ . . . . .	16
2.4	Schema a blocchi dell'osservatore robusto . . . . .	17
2.5	Schema a blocchi del sistema di controllo a regolazione dinamica . . . . .	19
2.6	Rappresentazioni equivalente del sistema di controllo o a regolazione statica (a) o a regolazione dinamica (b) . . . . .	20
2.7	Sistema di controllo con compensazione dell'attrito coulombiano . . . . .	25
3.1	Diagramma di Nyquist del sistema di controllo . . . . .	29
3.2	Confronto dei diagrammi di Nyquist dei guadagni di anello $L_{fil}(z)$ e $L_{din}(z) =$ $L_{st}(z)$ . . . . .	30
3.3	Schema equivalente del sistema di controllo a regolazione statica . . . . .	31
3.4	Schema equivalente del sistema di controllo a regolazione dinamica . . . . .	32
3.5	Schema equivalente del sistema di controllo a regolazione dinamica con filtri . . . . .	32
3.6	Effetto dell'inclinazione delle rotaie . . . . .	34
3.7	Effetto del disturbo di coppia . . . . .	35
3.8	Risposta del sistema di controllo privo del compensatore NL ( $\Psi = 0$ ) . . . . .	36
3.9	Risposta del sistema di controllo completo del compensatore NL ( $\Psi = F_s/a$ ) . . . . .	37
3.10	Risposta del sistema di controllo completo del compensatore NL ( $\Psi = 2F_s/a$ ) . . . . .	37
3.11	Risposta del sistema di controllo al variare di $Q_{55}$ . . . . .	38
3.12	Ingresso al sistema di controllo al variare di $Q_{55}$ . . . . .	38
3.13	Risposta del sistema di controllo al variare di $Q_{11}$ . . . . .	39
3.14	Risposta del sistema di controllo al variare di $Q_{11}$ . . . . .	39
3.15	Confronto tra le risposte dei sistemi di controllo. In blu la risposta del sistema di controllo a regolazione statica, in rosso la risposta del sistema di controllo a regolazione dinamica, in ocra la risposta del sistema di controllo a regolazione dinamica con filtri . . . . .	40
3.16	Simulazione dimostrativa . . . . .	41

# Sommario

Nel presente lavoro si studia il ben noto problema del bilanciamento di un pendolo inverso, discutendo il progetto e l'analisi di un sistema di controllo digitale robusto con l'obiettivo di mantenere la configurazione del processo all'equilibrio instabile. La sintesi e l'analisi del controllo consistono sia di moderne tecniche nello spazio di stato, come il controllo ottimo, che di tecniche più classiche, come quelle basate sulla risposta in frequenza.

Nell'introduzione si fornisce una breve descrizione qualitativa del sistema studiato. Nel primo capitolo si deriva dalle equazioni di Eulero-Lagrange il modello matematico descrivente la dinamica del processo. A seguire, nell'ottica di progettare un regolatore LQ digitale, se ne determina una rappresentazione tempo-discreta nello spazio di stato.

Nel secondo capitolo si definisce il sistema di controllo. Si opera in quattro fasi successive:

1. si determina uno schema di controllo, chiamato *a regolazione statica*, a retroazione ottimo LQ dello stato del processo e del modello interno dei disturbi;
2. non essendo lo stato completamente accessibile, si introduce nel precedente schema un osservatore robusto, nel senso che preserva le proprietà di stabilità del precedente schema di controllo. Ci si riferisce a tale schema di controllo con la dicitura *schema di controllo a regolazione dinamica*;
3. si affina il sistema di controllo introducendo un filtro PB all'ingresso del processo, dei filtri AA all'uscita del processo e un compensatore non lineare. Tale schema di controllo finale è chiamato *schema di controllo a regolazione dinamica con filtri*.
4. si completa il sistema di controllo introducendo un controllore per lo swing-up del pendolo.

Nel terzo capitolo si analizzano, per mezzo di simulazioni in ambiente Simulink<sup>®</sup>, le prestazioni del sistema di controllo progettato. In particolar modo, si discutono le proprietà di robustezza, la capacità del sistema di reiettare alcuni determinati disturbi agenti sul processo e si confrontano tra loro le risposte dei tre sistemi di controllo progettati per la stabilizzazione del processo.

# Introduzione

## Descrizione qualitativa del processo

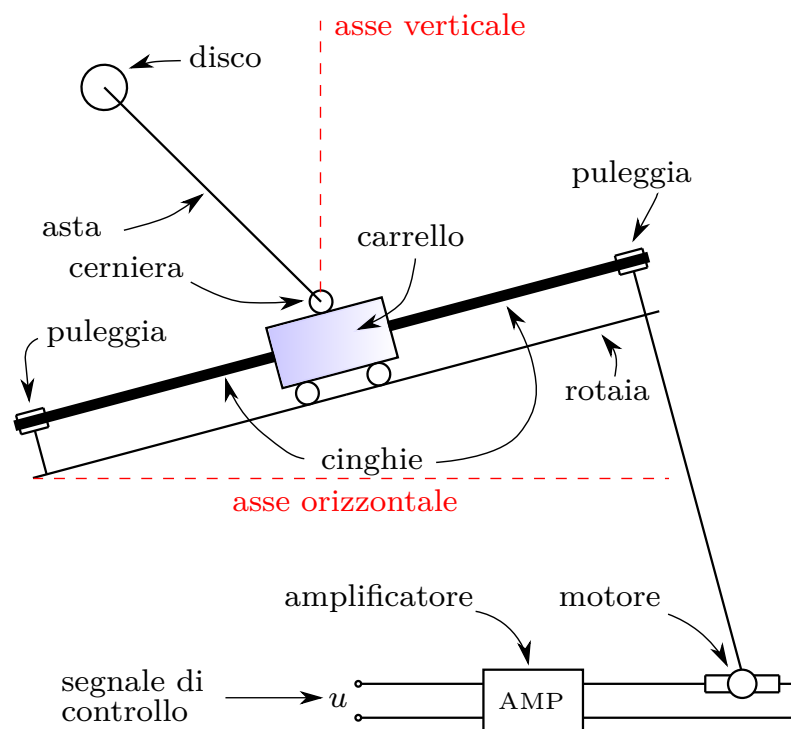


Figura 1: Schema del processo pendolo-carrello e meccanismo di attuazione

Il processo studiato nel presente lavoro è un *pendolo inverso*. Tale processo consiste in un'asta incernierata ad un carrello mobile, il quale poggia su delle rotaie inclinate rispetto all'orizzontale. All'estremità superiore dell'asta è applicato un disco. L'asta è libera di ruotare attorno alla cerniera mentre il carrello può muoversi lungo le rotaie. È possibile agire sul carrello tramite un sistema di attuazione, il quale consiste di un motore elettrico, pilotato in tensione dal segnale (opportunitamente amplificato) di controllo  $u$ , che, per mezzo di un meccanismo di trasmissione a cinghie e puleggie, è in grado di applicare al carrello una forza parallela alle rotaie. Per ulteriori chiarimenti, in figura 1 è mostrata una rappresentazione del processo pendolo-carrello completato dal meccanismo di attuazione.

## Interfaccia computer-processo

Si suppone che il segnale  $u$  sia generato in riferimento ad una legge di controllo elaborata via software da un computer. Nel modello considerato, l'interfaccia tra il computer e il processo è opportunamente realizzata, come mostrato qualitativamente in figura 2, utilizzando un insieme di filtri analogici congiuntamente ad una coppia di convertitori A/D, D/C.

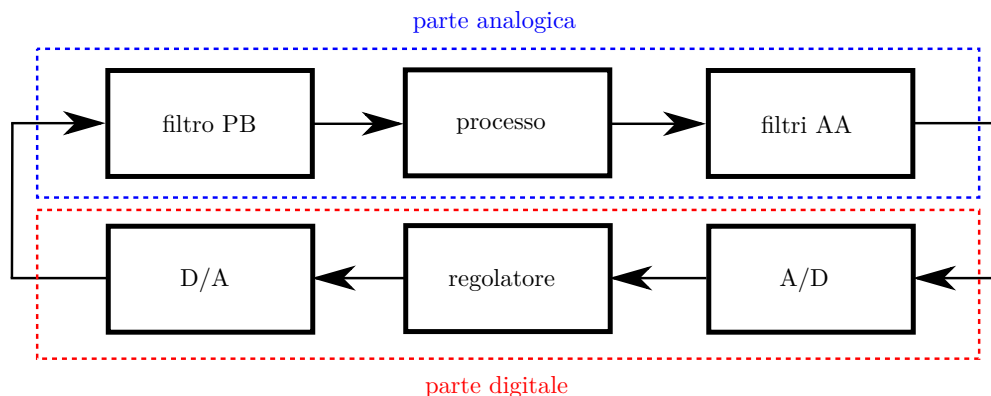


Figura 2: Diagramma qualitativo dell'anello di controllo

Nell'anello sono presenti dei sensori ideali, ossia a funzione di trasferimento unitaria, il cui ruolo è, naturalmente, quello di rilevare le necessarie misurazioni sul processo. I sensori a disposizione sono tre: un primo, in grado di rilevare la posizione del carrello, un secondo, la velocità del carrello e, infine, un terzo, l'angolazione dell'asta rispetto la normale alle rotaie. Non essendo possibile accedere alla velocità angolare dell'asta, si capisce che lo stato del processo non è completamente disponibile. Questa è la ragione per cui, nella pratica, non è possibile realizzare una regolazione statica del processo. Si rende dunque necessario introdurre nello schema di controllo un'osservatore della velocità angolare dell'asta.

I filtri presenti nello schema di controllo sono quattro: tre di questi sono inseriti in uscita ad ogni sensore con l'obiettivo di ridurre l'aliasing all'ingresso del convertitore A/D, mentre il restante filtro è posto in uscita al convertitore D/A in modo da eliminare le componenti in alta frequenza indesiderate del segnale di controllo  $u$ . Così come lo sono il regolatore e l'osservatore, la quaterna di filtri costituisce un terzo grado di libertà per il progetto del sistema di controllo.

Il convertitore A/D si occupa della digitalizzazione del segnale di ritorno fornito dal processo. In linea di principio si dovrebbe tener conto della non linearità che caratterizza l'operazione di quantizzazione operata dal convertitore A/D sul segnale di ritorno. Tuttavia si suppone che la dinamica dei segnali sia ottimizzata rispetto alla dinamica d'ingresso del convertitore A/D e che il numero di bit di risoluzione sia sufficientemente elevato da rendere l'errore di quantizzazione trascurabile. Allo stesso modo, non si modellano neanche le non idealità dovute all'irrealizzabilità di un campionamento istantaneo per cui, in definitiva, si considera un convertitore A/D ideale.

Il convertitore D/A, infine, genera, in base alla legge di controllo elaborata dall'algoritmo di controllo, il segnale  $u$  che, in seguito ad un'opportuna amplificazione ed il filtraggio passa-basso, va a pilotare il motore elettrico. Si considera come legge di ricostruzione quella di ordine nullo, per cui si considera un convertitore D/A di tipo ZOH.



## Robustezza e reiezione dei disturbi

La teoria del controllo ottimo fornisce dei risultati estremamente positivi riguardo la stabilità del controllo LQ TC. Infatti, si può dimostrare che una tale legge di controllo assicura un margine di fase di almeno  $60^\circ$  e un margine di guadagno limitato solamente inferiormente dal valore  $1/2$ . Tuttavia nel dominio TD non sono garantite tali proprietà di robustezza, per cui si rende necessaria un'indagine più approfondita del tema. In questo lavoro, studiando i diagrammi di Nyquist della funzione di anello, si trovano degli ottimi risultati riguardo la robustezza del controllo LQ TC. Sulla base di tali risultati, si introducono i filtri in ingresso ed in uscita al processo, fissando le pulsazioni di taglio in modo da ottenere dei margini di stabilità accettabili.

Un secondo aspetto, parimenti importante, studiato in fase di simulazione è la capacità del sistema di controllo di reiettare determinati disturbi di tipo additivo in ingresso e uscita al processo:

1. un disturbo di coppia impulsivo applicato al pendolo;
2. l'inclinazione delle rotaie rispetto l'orizzontale;
3. un disturbo di attrito viscoso nonlineare di tipo Coulombiano.

In particolare, per quanto riguarda i primi due disturbi, si analizzano le risposte in frequenza della posizione del carello e dell'angolo del pendolo.

## Swing up del pendolo

Nella prima parte del progetto del sistema di controllo ci si occupa della stabilizzazione del processo all'equilibrio stabile, supponendo che il processo si trovi inizialmente intorno a tale equilibrio. Al fine di estendere l'insieme degli stati iniziali per i quali si ha una corretta evoluzione dello stato del processo, si completa il progetto determinando una legge di controllo che consenta lo swing-up del pendolo, ossia che trasferisca il processo dallo stato di equilibrio stabile ad un intorno dello stato di equilibrio instabile. In questo modo, il sistema di controllo complessivo risulta essere in grado di equilibrare il pendolo a partire da una qualsiasi condizione iniziale.

# Modellistica

## 1.1 Descrizione geometrica del processo

Ai fini del controllo, il processo può essere considerato a parametri concentrati nei baricentri del carrello, dell'asta e del disco applicato all'estremità superiore dell'asta. Essendo il disco fissato rigidamente all'asta, la configurazione del processo è completamente individuata dalla posizione di un punto solidale al carrello, ad esempio il baricentro del carrello (punto A), e dalla posizione di un qualsiasi punto solidale all'asta e il disco, per esempio il baricentro del sistema asta-disco (punto B). D'ora in avanti si intenderà con il termine *pendolo* il sistema asta-disco. L'unico parametro geometrico di interesse è la distanza  $l$  tra la cerniera e il baricentro del pendolo. Per semplicità, si suppone che la posizione della cerniera coincida con la posizione del baricentro del carrello.

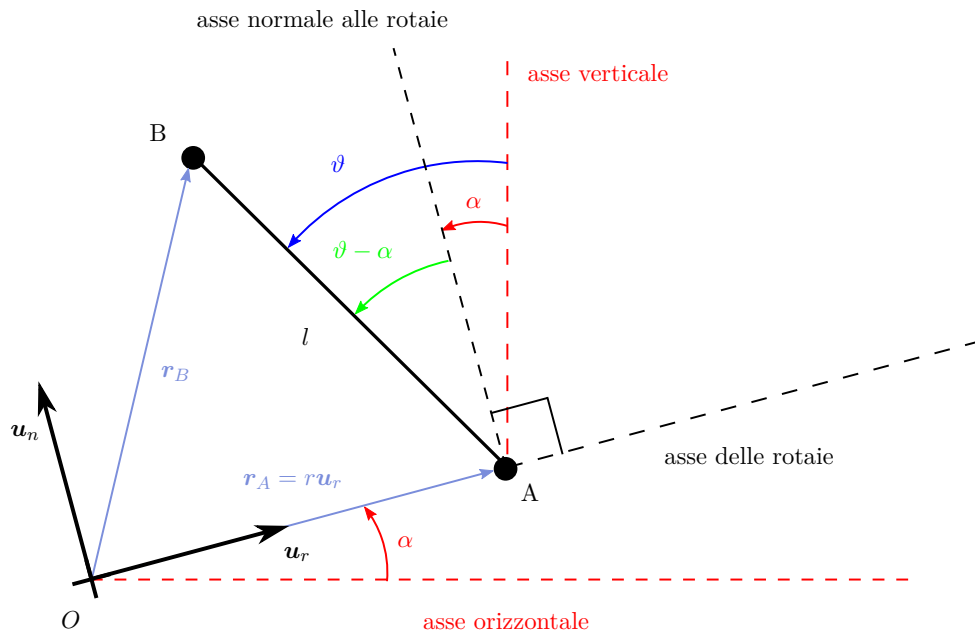


Figura 1.1: Geometria del processo

Il moto del carrello è limitato ad una sola traslazione lungo le rotaie mentre quello del pendolo è limitato ad una sola rotazione attorno la cerniera. Il processo ha dunque due soli gradi di libertà. Le rotaie e la cerniera, oltre che ad essere vincoli olonomi<sup>1</sup>, sono considerati per semplicità come vincoli lisci.

L'olonomità del processo garantisce l'esistenza di una coppia di coordinate libere in grado di descrivere completamente la configurazione del processo. Una semplice scelta delle coordi-

<sup>1</sup>rotaie e cerniera non pongono alcun limite all'atto di moto del processo

nate consiste nella coppia  $(r, \vartheta) \in [-R, +R] \times [-\pi, \pi]$ , dove  $r$  indica la posizione del baricentro del carrello lungo le rotaie, mentre  $\vartheta$  indica l'angolo formato dall'asta rispetto alla verticale. La costante  $R = 0.75$  m denota il fine corsa delle rotaie.

Come mostrato in figura 1.1, si assume come sistema di riferimento quello identificato dalle rotaie, cioè  $\{O, \hat{r}, \hat{n}\}$ . Si noti che questo è inclinato di un angolo  $\alpha$ , supposto piccolo e al più lentamente variabile nel tempo, rispetto al sistema di riferimento "naturale" dato dalla verticale e l'orizzontale. Tale angolo è interpretato come un disturbo additivo agente all'ingresso e all'uscita del processo.

## 1.2 Descrizione dinamica del processo

I parametri dinamici di interesse sono la massa  $M_c$  del carrello, il momento di inerzia  $J_p$  dell'asta e la massa  $m_p$  del disco. La massa dell'asta è considerata trascurabile rispetto a quella del disco, per cui quest'ultima rappresenta la massa del pendolo. Il momento di inerzia è riferito al baricentro del pendolo, considerando come centro di istantanea rotazione la cerniera.

Si suppone che il processo sia sottoposto all'azione  $F$  erogata dal meccanismo di attuazione, la forza peso  $F_P$  e un disturbo di coppia  $\tau$ . La forza  $F$  agisce parallelamente alle rotaie, il peso in direzione verticale e il disturbo di coppia, per semplicità, perpendicolarmente al pendolo. Nel modello si tiene conto anche di una coppia di termini di attrito viscoso: il primo, indicato come  $F_{Ac}$ , che agisce sul carrello mentre il secondo, indicato come  $\tau_{Ap}$ , che agisce sul pendolo.

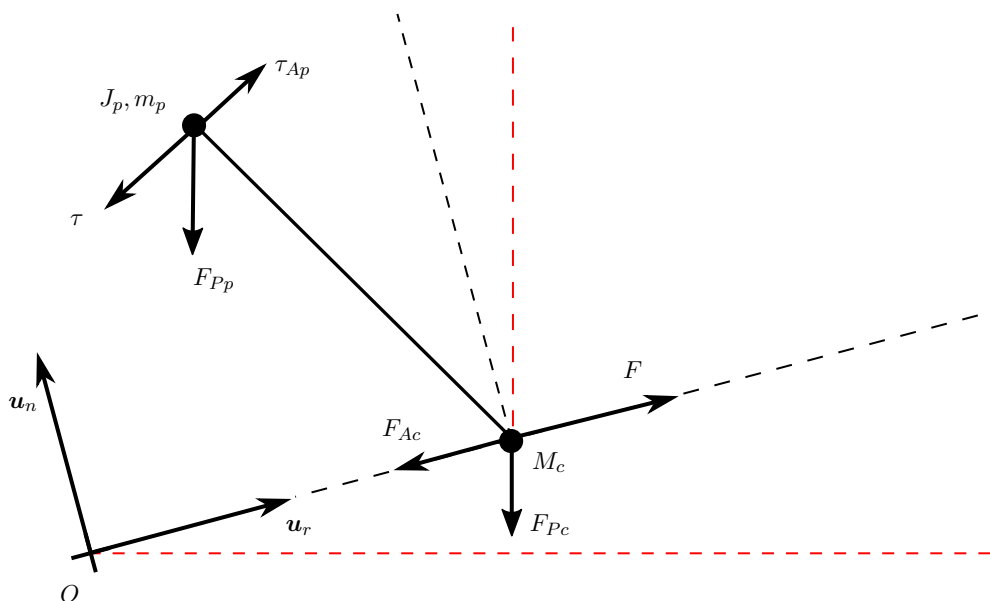


Figura 1.2: Dinamica del processo

Per semplicità di trattazione la dinamica del sistema di attuazione, in particolar modo l'induttanza del motore, è completamente trascurata, supponendo un legame puramente lineare tra forza impressa e segnale di controllo  $u$ , per cui si pone

$$F := au$$

dove  $a$  è un opportuno scalare rappresentante il guadagno del meccanismo di attuazione. Il termine di attrito viscoso che agisce sul carrello lo si suppone scomponibile in una parte lineare

e in una parte non lineare di tipo Coulombiano

$$F_{Ac} := b\dot{r} + F_s \text{sign}(\dot{r})$$

dove  $b$  ed  $F_s$  sono rispettivamente i coefficienti di attrito viscoso lineare e Coulombiano. Il termine di attrito viscoso agente sul pendolo lo si suppone invece puramente lineare

$$\tau_{Ap} := c\dot{\vartheta}$$

dove la costante  $c$  rappresenta il coefficiente di attrito viscoso angolare.

Le equazioni del moto in grande possono essere ottenute seguendo diversi approcci tra loro equivalenti, per esempio seguendo i metodi geometrici della meccanica vettoriale Newtoniana oppure seguendo i metodi analitici della meccanica scalare Lagrangiana. Nella presente trattazione, in modo del tutto arbitrario, si preferisce la via dettata dalla meccanica Lagrangiana. Secondo questo approccio, dopo aver introdotto la funzione Lagrangiana  $\mathcal{L}$ , le equazioni del moto vengono derivate dalle equazioni di Eulero-Lagrange, le quali, in base alle assunzioni fatte, assumono la seguente forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = au - b\dot{r} - F_s \text{sign}(\dot{r}) \quad (1.1)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} = \tau - c\dot{\vartheta} \quad (1.2)$$

dove il contributo della forza peso, in virtù della propria conservatività, non figura esplicitamente nelle precedenti equazioni, bensì implicitamente nella parte potenziale della funzione lagrangiana.

### 1.3 Lagrangiana

La Lagrangiana  $\mathcal{L}$  è definita come la differenza tra l'energia cinetica  $T$  e l'energia potenziale  $U$  del processo, pertanto in essa figurano quattro termini: le energie cinetiche e potenziali del carrello e del pendolo.

L'espressione dell'energia cinetica  $T_c$  del carrello, molto semplicemente, è data dalla definizione stessa di energia cinetica

$$T_c := \frac{1}{2} M_c \dot{r}^2$$

viceversa, l'espressione dell'energia cinetica del pendolo si ottiene per via indiretta applicando il teorema di K oenig, secondo il quale  $T_p = \frac{1}{2} m_p v_B^2 + \frac{1}{2} J_p \dot{\vartheta}^2$ . Il quadrato della velocit a  $v_B$  del baricentro del pendolo pu  essere determinato valutando il quadrato del modulo del vettore  $\dot{r}_B$ . Essendo  $r_B = [r - l \sin(\vartheta - \alpha)] \hat{r} + l \cos(\vartheta - \alpha) \hat{n}$ , si ha che  $v_B = [\dot{r} - l \cos(\vartheta - \alpha) \dot{\vartheta}] \hat{r} - l \sin(\vartheta - \alpha) \dot{\vartheta} \hat{n}$ , per cui si trova che

$$T_p = \frac{1}{2} m_p [\dot{r}^2 + l^2 \dot{\vartheta}^2 - 2l \cos(\vartheta - \alpha) \dot{r} \dot{\vartheta}] + \frac{1}{2} J_p \dot{\vartheta}^2$$

. In base alla definizione per sistemi meccanici, l'energia cinetica del processo si trova sommando tra loro la due precedenti relazioni, per cui

$$T := \frac{1}{2} (M_c + m_p) \dot{r}^2 + \frac{1}{2} (J_p + m_p l^2) \dot{\vartheta}^2 - m_p l \cos(\vartheta - \alpha) \dot{r} \dot{\vartheta} \quad (1.3)$$

Si noti come l'energia cinetica totale sia composta da una terna di termini dipendenti dall'atto di moto del processo: un primo, in  $\dot{r}^2$ , dovuto al moto lineare del processo, un secondo, in  $\dot{\vartheta}^2$ ,

dovuto al moto angolare del processo e un terzo, misto in  $\dot{r}\dot{\vartheta}$ , dovuto all'accoppiamento tra pendolo e carrello.

Dato che l'unica azione conservativa sul processo è quella dovuta alla forza peso, le energie potenziali del carrello e del pendolo assumono la forma  $U = mgh$ , dove  $m$  e  $h$  sono rispettivamente la massa e la quota del baricentro del corpo in questione. Per semplicità, si pone il riferimento del potenziale gravitazionale alla quota dell'origine del sistema di riferimento  $\{O, \hat{r}, \hat{n}\}$ . Sotto questa ipotesi, e trascurando ancora una volta la massa dell'asta rispetto alla massa del disco, si può dunque scrivere che le energie potenziali del carrello e del pendolo  $U_c$  e  $U_p$  sono pari a

$$U_c = M_c gr \sin \alpha, \quad U_p = m_p g(r \sin \alpha + l \cos \vartheta)$$

Per la definizione relativa a sistemi meccanici, l'energia potenziale del processo si trova sommando le due precedenti espressioni, quindi

$$U := (M_c + m_p)gr \sin \alpha + m_p gl \cos \vartheta \quad (1.4)$$

si noti come adesso l'energia potenziale totale sia composta da una coppia di termini dipendenti dalla configurazione del processo: un primo, in  $r$ , dovuto alla posizione del processo rispetto al sistema di riferimento, e un secondo, in  $\vartheta$ , dovuta all'angolazione del pendolo rispetto alla verticale.

Valutando la differenza tra (1.3) e (1.4), si trova, per definizione, finalmente l'espressione della Lagrangiana che caratterizza il processo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M_c + m_p)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}(J_p + m_p l^2)\dot{\vartheta}^2 - m_p l \cos(\vartheta - \alpha)\dot{r}\dot{\vartheta} - (M_c + m_p)gr \sin \alpha - m_p gl \cos \vartheta \quad (1.5)$$

## 1.4 Equazioni del moto

Inserendo (1.5) in (1.1)-(1.2), si trovano le due equazioni che governano il moto in grande del processo. In termini espliciti, tali equazioni sono

$$\begin{aligned} (M_c + m_p)\ddot{r} - m_p l \cos(\vartheta - \alpha)\ddot{\vartheta} + m_p l \sin(\vartheta - \alpha)\dot{\vartheta}^2 + (M_c + m_p)g \sin \alpha + b\dot{r} + F_s \text{sign}(\dot{r}) &= au \\ (J_p + m_p l^2)\ddot{\vartheta} - m_p l \cos(\vartheta - \alpha)\ddot{r} - m_p gl \sin \vartheta + c\dot{\vartheta} &= \tau \end{aligned}$$

che costituiscono una coppia di equazioni differenziali del secondo ordine, accoppiate e non lineari nelle incognite  $r$  e  $\vartheta$ , la cui risoluzione non è affatto banale. Tuttavia, ai fini del controllo, non si è interessati al moto in grande del sistema ma solo al moto in piccolo nell'intorno dello stato di equilibrio instabile del processo. Questo fatto, congiuntamente all'ipotesi che l'inclinazione  $\alpha$  sia sufficientemente piccola, permette dunque di semplificare notevolmente il problema del moto. Infatti, sotto queste ipotesi valgono le seguenti approssimazioni

$$\sin(\vartheta - \alpha) \approx \vartheta - \alpha, \quad \cos(\vartheta - \alpha) \approx 1, \quad \sin \vartheta \approx \vartheta, \quad \cos \vartheta \approx 1, \quad \sin \alpha \approx \alpha$$

secondo le quali le precedenti equazioni di moto si riducono alle più semplici equazioni linearizzate

$$(M_c + m_p)\ddot{r} - m_p l \ddot{\vartheta} + (M_c + m_p)g\alpha + b\dot{r} + F_s \text{sign}(\dot{r}) = au \quad (1.6)$$

$$(J_p + m_p l^2)\ddot{\vartheta} - m_p l \ddot{r} - m_p gl \vartheta + c\dot{\vartheta} = \tau \quad (1.7)$$

Si noti come in (1.6) il termine non lineare  $m_p l \sin(\vartheta - \alpha)\dot{\vartheta}^2 \approx m_p l(\vartheta - \alpha)\dot{\vartheta}^2$  sia trascurato rispetto al termine  $c\dot{\vartheta}$ . Le equazioni (1.6)-(1.7) così ottenute sono una coppia di equazioni

differenziali del secondo ordine, accoppiate e, salvo per il termine di attrito coulombiano, lineari nelle incognite  $r$  e  $\vartheta$ .

Le equazioni del moto in piccolo possono essere convenientemente espresse in forma compatta come un'unica equazione matriciale della forma

$$\mathcal{M}\mathcal{A} = \mathcal{F} \quad (1.8)$$

per opportune quantità  $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ ,  $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ . Definendo  $\mathcal{A} := \begin{bmatrix} \dot{r} & \ddot{\vartheta} \end{bmatrix}^T$ , (1.8) assume la forma

$$\begin{bmatrix} M_c + m_p & -m_p l \\ -m_p l & J_p + m_p l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \ddot{\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} au - (M_c + m_p)g\alpha - b\dot{r} - F_s \text{sign}(\dot{r}) \\ \tau + m_p g l \vartheta - c\dot{\vartheta} \end{bmatrix}$$

si noti come la matrice dei coefficienti  $\mathcal{M}$  sia costante e, come mostra una semplice analisi con il criterio di Sylvester, definita positiva. In accordo al fatto che le equazioni di Eulero-Lagrange possono sempre essere riportate in forma normale, è dunque possibile risolvere (1.8) rispetto ad  $\mathcal{A}$  in tutto  $\mathbb{R}^2$ . In altri termini, il sistema di equazioni (1.6)-(1.7) ammette una rappresentazione globale in forma normale, da cui segue la possibilità di determinare una rappresentazione della dinamica del processo nello spazio di stato. Si ricerca dunque tale forma normale.

Per la regola di Cramer, l'inversa della matrice dei coefficienti  $\mathcal{M}$  è la matrice

$$\mathcal{M}^{-1} = (\det \mathcal{M})^{-1} \begin{bmatrix} J_p + m_p l^2 & m_p l \\ m_p l & M_c + m_p \end{bmatrix}$$

la quale, applicata al vettore  $\mathcal{F}$ , fornisce l'espressione esplicita della soluzione  $\mathcal{A}$ . Seguendo il procedimento descritto, con un po' di semplice algebra si trova l'espressione in forma normale delle equazioni del moto in piccolo

$$\begin{aligned} \dot{r} = (\det \mathcal{M})^{-1} [ & m_p^2 l^2 g \vartheta - (J_p + m_p l^2) b \dot{r} - m_p l c \dot{\vartheta} + (J_p + m_p l^2) a u \\ & - (J_p + m_p l^2) (M_c + m_p) g \alpha + m_p l \tau - (J_p + m_p l^2) F_s \text{sign}(\dot{r}) ] \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta} = (\det \mathcal{M})^{-1} [ & (M_c + m_p) m_p l g \vartheta - m_p l b \dot{r} - (M_c + m_p) c \dot{\vartheta} + m_p l a u \\ & - m_p l (M_c + m_p) g \alpha + (M_c + m_p) \tau - m_p l F_s \text{sign}(\dot{r}) ] \end{aligned} \quad (1.10)$$

Si osservi come la dinamica, e dunque l'equilibrio, del processo sia indipendente dalla posizione del carrello lungo le rotaie. Dal punto di vista del controllo, dunque, la variabile  $r$  costituisce un grado di libertà.

## 1.5 Rappresentazione di stato ridotta

Introducendo un opportuno vettore di stato  $x \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ , le equazioni (1.9)-(1.10) possono essere espresse come un sistema di quattro equazioni differenziali del primo ordine. Una buona scelta per lo stato è quella canonica per sistemi meccanici, dove si definiscono come variabili di stato le posizioni e le velocità dei corpi che costituiscono il sistema. Si pone dunque

$$x := \begin{bmatrix} r & \vartheta & \dot{r} & \dot{\vartheta} \end{bmatrix}^T$$

. Con una tale scelta, la coppia di equazioni (1.9)-(1.10) è equivalente all'equazione di stato LTI<sup>2</sup>

$$\dot{x} = Ax + B_u u + B_\alpha \alpha + B_\tau \tau + B_{F_s} F_s \text{sign}(e_3^T x) \quad (1.11)$$

dove la matrice di stato  $A$  assume la forma

$$A = (\det \mathcal{M})^{-1} \left[ \begin{array}{cc|cc} 0_{2 \times 2} & & (\det \mathcal{M}) I_2 & \\ \hline 0 & m_p^2 l^2 g & -(J_p + m_p l^2) b & -m_p l c \\ 0 & (M_c + m_p) m_p l g & -m_p l b & -(M_c + m_p) c \end{array} \right] \quad (1.12)$$

. Si noti come la prima colonna sia nulla in conseguenza del fatto che la dinamica del processo è indipendente da  $r$ . Dal punto di vista algebrico, tale matrice non è a rango pieno, pertanto presenta, a riprova del fatto che l'equilibrio considerato è instabile, almeno un autovalore nullo, cioè nella regione di instabilità TC. Ad essere più precisi, come mostrano i risultati numerici, la matrice di stato presenta anche un autovalore a parte reale positiva, rendendo così il sistema esponenzialmente instabile.

Le matrici di trasferimento dall'ingresso e dai disturbi verso lo stato assumono invece le seguenti forme

$$B_u = (\det \mathcal{M})^{-1} \begin{bmatrix} 0_{2 \times 1} \\ J_p + m l^2 \\ m_p l \end{bmatrix} a, \quad B_\alpha = -\frac{M_c + m_p}{a} g B_u \quad (1.13)$$

$$B_\tau = (\det \mathcal{M})^{-1} \begin{bmatrix} 0_{2 \times 1} \\ m_p l \\ M_c + m_p \end{bmatrix}, \quad B_{F_s} = -\frac{1}{a} B_u \quad (1.14)$$

È immediato constatare che per un qualsiasi ingresso  $u'$  la legge di controllo

$$u = u' + \frac{F_s}{a} \text{sign}(e_3^T x_3) \quad (1.15)$$

cancella il termine di attrito Coulombiano presente nella (1.11). Tuttavia tale soluzione non è solitamente implementabile in quanto il coefficiente  $F_s$  non è noto con sufficiente accuratezza.

Per completare la rappresentazione del processo nello spazio di stato occorre definire una equazione di uscita da accostare all'equazione di stato (1.11). La terna di sensori a disposizione forza la definizione del vettore di uscita alla seguente

$$y := \begin{bmatrix} r & \vartheta - \alpha & \dot{r} \end{bmatrix}^T$$

si noti come il sensore di posizione angolare sia in grado di rilevare solamente l'angolazione del pendolo rispetto la normale alle rotaie. Questo perché il sensore è montato sul carrello ed è tarato in modo da leggere lo zero nella condizione di rotaie orizzontali e pendolo verticale. L'equazione di uscita assume quindi una forma non strettamente causale del tipo

$$y = Cx + D_\alpha \alpha \quad (1.16)$$

dove i parametri assumono le forme

$$C = \begin{bmatrix} I_3 & 0_{3 \times 1} \end{bmatrix}, \quad D_\alpha = -e_2^T$$

<sup>2</sup>si tenga presente che il termine *lineare* è utilizzato impropriamente a causa del termine di attrito coulombiano

## 1.6 Rappresentazione di stato estesa

Fino a questo punto non si è tenuto conto della presenza dei filtri AA in uscita ai sensori e del filtro PB in ingresso al processo. Detto  $v_{\text{in}} \in \mathbb{R}$  lo stato del filtro PB e  $v_{\text{out}} \in \mathbb{R}^3$  lo stato dei filtri AA, si definiscono le relative equazioni di stato come

$$\begin{aligned}\dot{v}_{\text{in}} &:= -a_{\text{in}}v_{\text{in}} + a_{\text{in}}u \\ \dot{v}_{\text{out}} &:= -a_{\text{out}}v_{\text{out}} * I_3 + a_{\text{out}} * I_3y\end{aligned}$$

dove i parametri, successivamente da dimensionare,  $a_{\text{in}}$  e  $a_{\text{out}}$  sono rispettivamente due scalari. Ponendo  $a_{\text{in}}, a_{\text{out}} > 0$  si garantisce la stabilità di tali filtri.

Per includere i filtri nel modello del processo esteso occorre definire un nuovo vettore di stato che contiene anche le informazioni riguardo lo stato dei filtri. Definendo quindi lo stato del processo esteso come

$$x^e := \begin{bmatrix} v_{\text{in}} & x^T & v_{\text{out}}^T \end{bmatrix}^T$$

si determina l'equazioni di stato

$$\dot{x}^e = A^e x^e + B_u^e u + B_\alpha^e \alpha + B_\tau^e \tau + B_{F_s}^e F_s \text{sign}(e_4^T x_k^e) \quad (1.17)$$

dove la matrice di stato  $A^e$  è

$$A^e = \begin{bmatrix} -a_{\text{in}} & 0_{1 \times 4} & 0_{1 \times 3} \\ B_u & A & 0_{4 \times 3} \\ 0_{3 \times 1} & a_{\text{out}} C & -a_{\text{out}} \end{bmatrix}.$$

La sua forma triangolare suggerisce, come è ragionevole aspettarsi, che le proprietà di stabilità in anello aperto del processo esteso dipendono in modo separato dalle proprietà di stabilità dei filtri e del processo.

Le matrici di trasferimento dall'ingresso e dai disturbi verso lo stato assumono invece le seguenti forme

$$\begin{aligned}B_u^e &= \begin{bmatrix} a_{\text{in}} \\ 0_{4 \times 1} \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix}, & B_\alpha^e &= \begin{bmatrix} 0 \\ B_\alpha \\ a_{\text{out}} D_\alpha \end{bmatrix} \\ B_\tau^e &= \begin{bmatrix} 0 \\ B_\tau \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix}, & B_{F_s}^e &= \begin{bmatrix} 0 \\ B_{F_s} \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

si osservi come, pur conoscendo accuratamente il valore di  $F_s$ , l'inserimento dei filtri nel modello renda inefficace la legge di controllo (1.15) nel compensare il termine di attrito Coulombiano.

Per quanto riguarda l'uscita del processo esteso, i segnali ora a disposizione sono le uscite dei filtri AA, dunque si pone

$$y^e := v_{\text{out}}$$

per cui l'equazione di uscita del processo esteso assume la seguente forma

$$y^e = C^e x^e \quad (1.18)$$

dove la matrice di trasferimento dallo stato verso l'uscita è semplicemente

$$C^e = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 4} & I_3 \end{bmatrix}$$



## 1.7 Discretizzazione

Il progetto di un sistema di controllo digitale può essere sviluppato seguendo due diversi paradigmi:

1. sintesi *indiretta*: si determina un regolatore nel dominio TC e a seguire se ne determina una discretizzazione secondo un opportuno intervallo di campionamento  $T$ ;
2. sintesi *diretta*: si discretizza il modello del processo secondo un opportuno intervallo di campionamento  $T$  e a seguire si determina un regolatore nel dominio TD.

La tecnica diretta è preferibile a quella indiretta in quanto non richiede approssimazioni e in generale, a parità di prestazioni, richiede campionamenti meno rapidi<sup>3</sup>. Nel presente lavoro si procede per sintesi diretta, per cui in questo paragrafo ci si occupa della discretizzazione del modello del processo ridotto e del processo esteso, supponendo una trasformazione di campionamento ideale e una ricostruzione di tipo ZOH.

Ragionevolmente, si assume l'ipotesi che i disturbi  $\alpha$  e  $\tau$  siano costanti durante gli intervalli di campionamento, in modo da semplificare i risultati dei calcoli a seguire. La stessa ipotesi non può essere assunta per il termine di attrito Coulombiano in quanto, a causa delle oscillazioni del processo intorno all'equilibrio, la velocità del carrello si inverte ripetutamente nel tempo.

Il modello di stato TC (1.11)-(1.16), a seguito del campionamento, assume la forma generale

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma_u u_k + \Gamma_\alpha \alpha_k + \Gamma_\tau \tau_k + N_k(e_3^T x_k; T) \quad (1.19)$$

$$y_k = C x_k + D_\alpha \alpha_k \quad (1.20)$$

dove  $\Phi$ ,  $\{\Gamma_i, i = u, \alpha, \tau\}$  sono matrici costanti mentre  $N$  è una funzione dipendente dalla velocità del carrello durante un intero intervallo di campionamento. Tale funzione nasce dal campionamento del termine di attrito Coulombiano. Il campionamento non ha alcun effetto sulle matrici di uscita  $C$  e  $D_\alpha$

Come noto, il campionamento a passo  $T$  lega la matrice di stato tempo-discreta  $\Phi$  alla matrice di stato TC  $A$  secondo la relazione

$$\Phi = \exp(AT)$$

Il campionamento ha invece un effetto diverso sulle matrici di trasferimento dall'ingresso e dai disturbi verso lo stato. Queste sono legate alle rispettive matrici TC secondo le relazioni

$$\Gamma_i = \int_0^T \exp(A\sigma) B_i d\sigma \quad \text{per } i = u, \alpha, \tau$$

viceversa, il termine di attrito Coulombiano, potendo variare durante l'intervallo di campionamento, dà luogo alla funzione

$$N(e_3^T x_k; T) = \int_0^T \exp[A(T - \sigma)] B_{F_s} F_s \text{sign}[e_3^T x(\sigma + kT)] d\sigma \quad (1.21)$$

Come si può osservare, il campionamento ha l'effetto di rendere inefficace la legge di controllo

$$u_k = u'_k + \frac{F_s}{a} \text{sign}(e_3^T x_k) \quad (1.22)$$

---

<sup>3</sup>A differenza dei metodi indiretti, nei metodi diretti la scelta dell'intervallo di campionamento è teoricamente limitata inferiormente solamente dal teorema del campionamento

nel compensare il disturbo  $N(e_3^T x_k; T)$ . Tuttavia, se la velocità del carrello mantiene il proprio verso costante per tutto l'intervallo di campionamento si ha che (1.14) si riduce a

$$N(e_3^T x_k; T) = \left[ \int_0^T \exp(A\sigma) B_{F_s} d\sigma \right] F_s \text{sign}(e_3^T x_k)$$

la quale, come è immediato verificare, è compensata dall'ingresso (1.17).

Per quanto riguarda il processo esteso, l'effetto del campionamento sulle equazioni (1.14)-(1.15) è analogo a quello sulle equazioni (1.11)-(1.13), i.e.

$$x_{k+1}^e = \Phi^e x_k^e + \Gamma_u^e v_{\text{in}_k} + \Gamma_\alpha^e \alpha_k + \Gamma_\tau^e \tau_k + N_k^e(e_3^T x_k; T) \quad (1.23)$$

$$y_k^e = C^e x_k^e \quad (1.24)$$

dove adesso, con le dovute modifiche, i parametri che caratterizzano il processo sono

$$\Phi^e = \exp(A^e T), \quad \left\{ \Gamma_i^e = \int_0^T \exp(A^e \sigma) B_i^e d\sigma \right\}_{i=u,\alpha,\tau},$$

$$N^e(e_3^T x_k; T) = \int_0^T \exp[A^e(T - \sigma)] B_{F_s}^e \text{sign}[e_3^T x(\sigma + kT)] d\sigma$$

. Si osservi come, indipendentemente dalla scelta del tempo di campionamento, la legge di controllo (1.17) non sia in grado di compensare il termine di attrito coulombiano.

## 1.8 Dominio della frequenza

I modelli di stato (1.16)-(1.17) e (1.20)-(1.21) possono essere espressi nel dominio della frequenza attraverso l'applicazione della trasformata zeta. Supponendo per semplicità che il processo si trovi inizialmente in quiete, per quanto riguarda il modello ridotto si trova

$$x(z) = (zI_4 - \Phi)^{-1} \left[ \Gamma_u u(z) + \Gamma_\alpha \alpha(z) + \Gamma_\tau \tau(z) + \mathcal{Z}\{N(e_3^T x_k; T)\} \right]$$

$$y(z) = Cx(z) + D_\alpha \alpha(z)$$

. una possibile rappresentazione a blocchi di tali equazioni è mostrata in figura 1.3

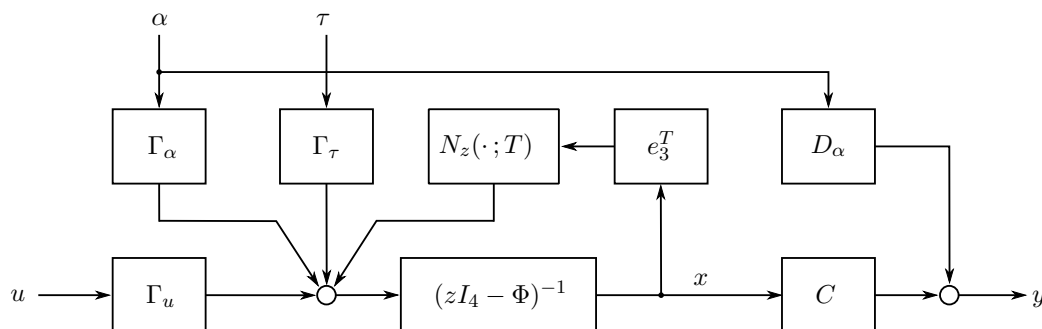


Figura 1.3: Schema a blocchi del processo ridotto

Si noti come lo stato venga retroazionato all'ingresso del processo attraverso il termine di attrito Coulombiano. Tale anello è fonte di instabilità per il processo. Al fine di contenere l'effetto indesiderato di tale retroazione, risulta dunque cruciale determinare un metodo per reiettare il termine di attrito coulombiano.

D'altro canto, per quanto riguarda il modello esteso, si trova analogamente

$$x^e(z) = (zI_4 - \Phi^e)^{-1} \left[ \Gamma_u^e v_{in}(z) + \Gamma_\alpha^e \alpha(z) + \Gamma_\tau^e \tau(z) + \mathcal{Z}\{N_z^e(e_4^T x_k^e; T)\} \right]$$

$$y^e(z) = C^e x^e(z)$$

che ammette la rappresentazione a blocchi di figura 1.4

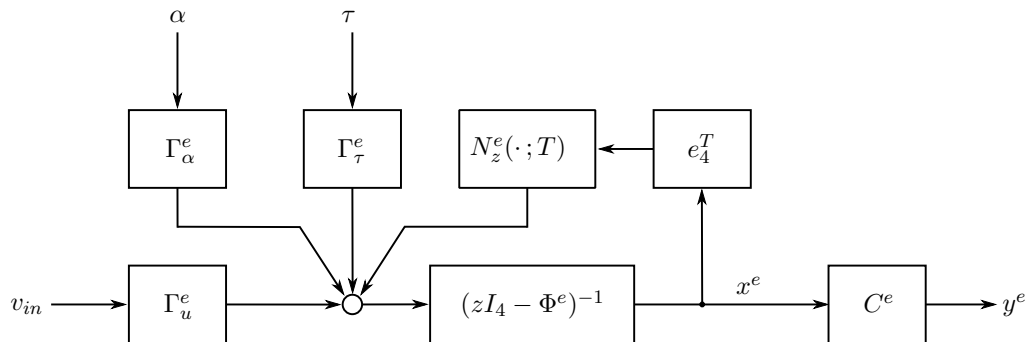


Figura 1.4: Schema a blocchi del processo esteso

## 1.9 Forma numerica del processo TC

I valori numerici dei parametri che caratterizzano il processo in esame sono riassunti nella tabella 1.1

parametro	valore	dimensione	descrizione
$M_c$	2.3900	kg	massa del carrello, includente l'inerzia del meccanismo di attuazione
$M_p$	0.9400	kg	massa del pendolo
$J_p$	0.0727	kg · m <sup>2</sup>	momento d'inerzia baricentrico del pendolo
$l$	0.5358	m	distanza tra baricentro del pendolo e cerniera
$g$	9.8100	m · s <sup>2</sup>	accelerazione di gravità
a	9.7220	N · V <sup>-1</sup>	guadagno dell'attuatore, trascurante la dinamica dell'amplificatore e del motore
b	13.6111	kg · s <sup>-1</sup>	coefficiente di attrito viscoso del carrello, includente la FCEM generata dal motore
c	trascurabile	kg · m · s <sup>-1</sup>	coefficiente di attrito viscoso del pendolo
$F_s$	ND	N	coefficiente di attrito viscoso di Coulomb

Tabella 1.1: Parametri del processo

inserendo i valori della tabella 1.1 in (1.12), (1.13) e (1.14) si determinano numericamente le matrici di trasferimento TC che descrivono il processo in esame. La matrice di stato diventa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0 & 2.8053 & -5.2563 & 0 \\ 0 & 18.5480 & -7.7282 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.25)$$

mentre le matrici di trasferimento dall'ingresso e dai disturbi verso lo stato assumoni i valori

$$B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.7544 \\ 5.5200 \end{bmatrix}, \quad B_\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -12.6153 \\ -18.5480 \end{bmatrix}, \quad B_\tau = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5678 \\ 3.7540 \end{bmatrix}, \quad B_{F_s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.3862 \\ -0.5678 \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

## 1.10 Forma numerica del processo TD

Per discretizzare il processo TC, occorre prima definire un opportuno intervallo di campionamento  $T$  per poi applicare le relative trasformazioni di campionamento. L'unico vincolo da rispettare è la condizione di Nyquist

$$\omega_T \geq 2\omega_b \quad (1.27)$$

dove  $\omega_T = 2\pi/T$  è la pulsazione di campionamento, mentre  $\omega_b$  indica la banda passante del processo. La dinamica del processo, dalla quale si deduce poi  $\omega_b$ , è descritta dai modi naturali del processo stesso, i quali sono completamente determinati dagli autovalori della matrice di stato  $A$ . Questi ultimi possono essere determinati agevolmente in ambiente MATLAB®, applicando il comando `eig` alla matrice di stato  $A$  corrente. Si trova

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 4.0265, \quad \lambda_3 = -2.9941, \quad \lambda_4 = -6.2887 \quad (\text{rad/s}).$$

Si noti la presenza, oltre al già noto autovalore nell'origine, del secondo autovalore "instabile" in  $\lambda_2$ . La forma reale degli autovalori indica che i modi naturali del processo sono monotoni con relative pulsazioni di taglio a  $-3\text{dB}$  pari a  $\{\omega_{c_i} = |\lambda_i|\}_{i=1}^4$ . La banda passante del processo è quindi approssimativamente

$$\omega_b \approx \max_{i \in \{1,2,3,4\}} \omega_{c_i} \approx 7 \text{ rad/s}$$

da cui segue la scelta, ottenuta in accordo alla (1.27) per  $\omega_T \approx 180\omega_b$ , del tempo di campionamento

$$T = 5 \text{ ms} \quad (1.28)$$

La discretizzazione del processo può essere ora ottenuta in ambiente MATLAB® applicando il comando `c2d` alle matrici in (1.25), (1.26). In accordo alla scelta fatta dell'intervallo di campionamento, si ottiene la matrice di stato

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0049 & 0.0000 \\ 0 & 1.0002 & -0.0001 & 0.0050 \\ 0 & 0.0138 & 0.9741 & 0.0000 \\ 0 & 0.0925 & -0.0381 & 1.0002 \end{bmatrix},$$

e le matrici di trasferimento dall'ingresso e dai disturbi verso lo stato

$$\Gamma_u = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0001 \\ 0.0185 \\ 0.0272 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_\alpha = \begin{bmatrix} -0.0002 \\ -0.0002 \\ -0.0623 \\ -0.0915 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_\tau = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0028 \\ 0.0187 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_{F_s} = \begin{bmatrix} -0.0000 \\ -0.0000 \\ -0.0019 \\ -0.0028 \end{bmatrix}$$

. Si noti come il campionamento renda prossima all'identità la matrice di stato e tenda ad annullare le altre matrici. È opportuno ribadire che non conviene scegliere intervalli di campionamento eccessivamente brevi anche perché questi, già in questa fase studio, possono generare

errori di cancellazione numerica che possono malcondizionare successivamente il calcolo della legge di controllo. Nella figura seguente sono riportate a confronto le risposte al gradino (relative alle funzioni di trasferimento dall'ingresso alla posizione del carrello) TD e TC. La risposta sull'orizzonte di tempo  $[0, 5\omega_b^{-1} \approx 1]$  s mostra qualitativamente come nel complesso la risposta al gradino TD sia una buona approssimazione della rispettiva TC, mentre la risposta sull'orizzonte di tempo  $[0, 3T = 0.015]$  s mostra nel dettaglio il fatto che il campionamento ZOH in generale preserva la risposta al gradino.

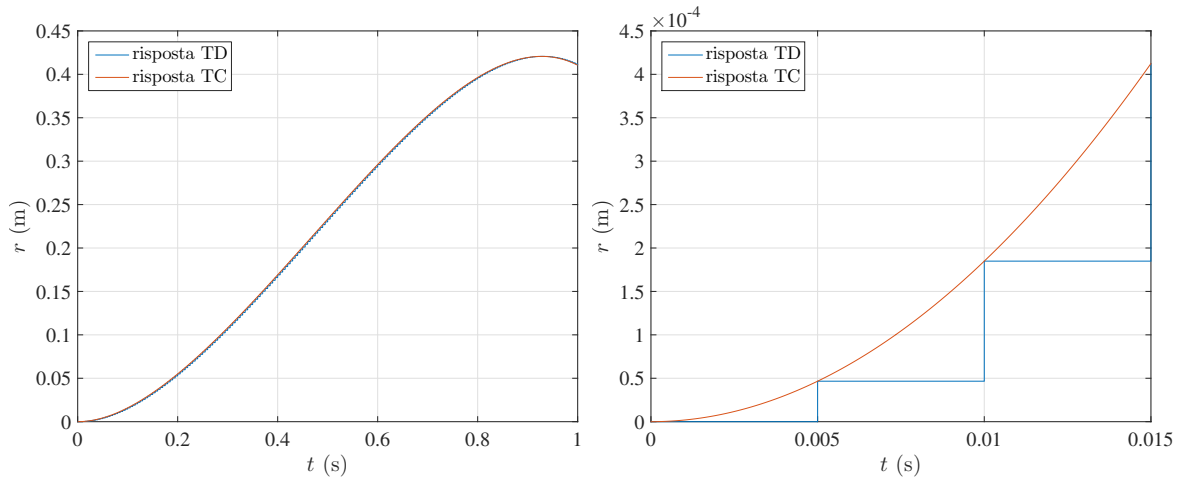


Figura 1.5: Confronto risposte impulsive TC, TD

# Controllo

## 2.1 Modello interno

Nella prima parte del progetto del sistema di controllo si trascura l'anello di retroazione dovuto all'attrito Coulombiano. La sua trattazione verrà ripresa una volta determinato il controllo dell'anello privo di tale disturbo. Si trascura anche l'effetto dei filtri, i quali verranno dimensionati a posteriori in modo da preservare la stabilità dell'anello di controllo. In definitiva, la sintesi del controllo viene effettuata in riferimento allo schema a blocchi semplificato di figura 2.1

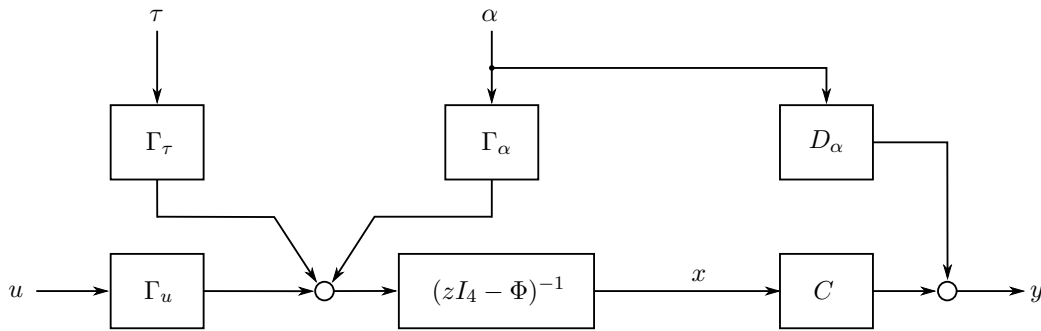


Figura 2.1: Schema a blocchi del processo semplificato

In virtù del PdMI, al fine di reiettare l'effetto sull'ingresso del disturbo dovuto all'inclinazione delle rotaie, si include nel processo il modello interno di tale disturbo. Il disturbo in questione è supposto al più lentamente variabile nel tempo per cui il suo modello è quello di un integratore. In questo modo è garantita anche la reiezione di disturbi di coppia costanti, essendo questi in ingresso al processo. Non è invece reiettato l'effetto sull'uscita del disturbo dovuto all'inclinazione delle rotaie.

Per semplicità, si definisce il modello interno nella seguente semplice forma

$$w_{k+1} := w_k + (e_1^T x_k - r_{sp})$$

dove  $w$  denota lo stato del modello interno, mentre  $r_{sp}$  denota un prestabilito punto di riferimento lungo le rotaie, il quale assumerà il ruolo di setpoint del sistema di controllo. La relativa rappresentazione nel dominio della frequenza, supponendo uno stato iniziale di quiete, è

$$w(z) = \frac{1}{z-1} (e_3^T x(z) - r_{sp})$$

pertanto lo schema a blocchi del processo aumentato del modello interno assume la nuova forma mostrata in figura 2.2.

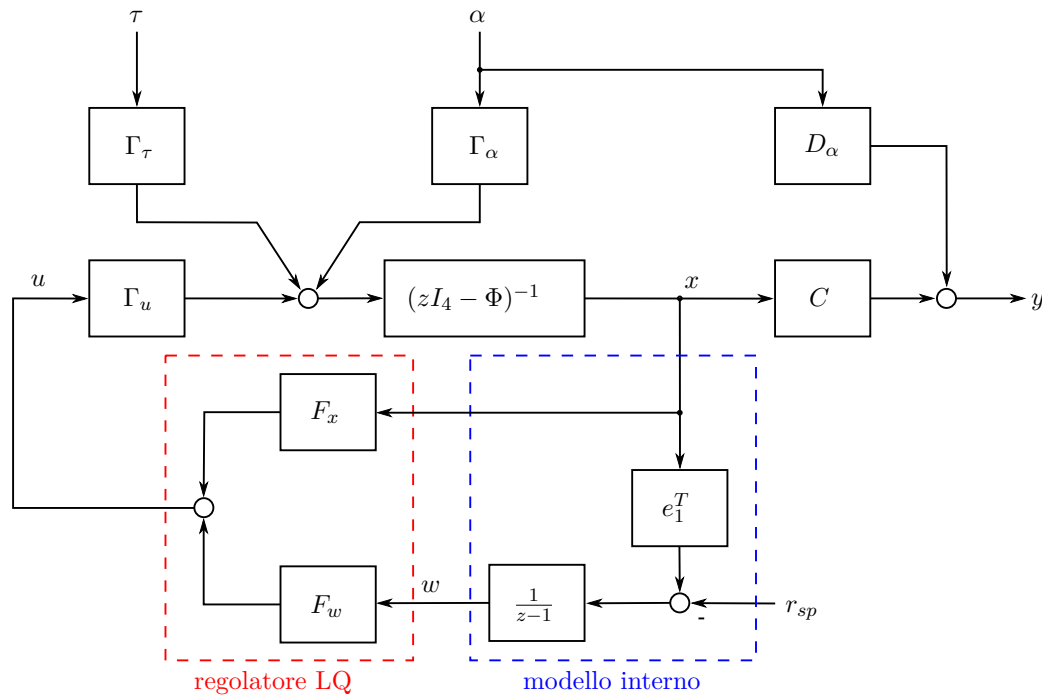


Figura 2.2: Schema a blocchi del processo aumentato

La scelta di integrare l'errore di posizione  $e_3^T x_k - r_{sp}$  è giustificata dal fatto che, una volta chiuso l'anello, la posizione del carrello è, fintanto che la sua variazione temporale è limitata, forzata al riferimento  $r_{sp}$ . In altri termini, l'integrazione dell'errore di posizione in anello chiuso permette di posizionare il carrello nella posizione arbitraria  $r_{sp}$ . Si noti che il processo viene sempre pilotato in uno stato di equilibrio in quanto, come osservato in precedenza, la dinamica del processo non dipende dalla posizione del carrello lungo le rotaie.

L'introduzione del modello interno del disturbo  $\alpha$  comporta una modifica della rappresentazione di stato del processo semplificato, in quanto lo stato del processo aumentato deve tener conto dello stato dell'integratore. Occorre estendere lo stato del processo ridotto con lo stato del modello interno, per cui si definisce lo stato dal processo aumentato (processo ridotto e modello interno) come

$$x^a := \begin{bmatrix} x^T & w \end{bmatrix}^T$$

in base a tale definizione, la rappresentazione nello spazio di stato del processo aumentato viene modificata nella seguente

$$\begin{aligned} x_{k+1}^a &= \Phi^a x_k^a + \Gamma_u^a u_k + \Gamma_r^a r_{sp} + \Gamma_\alpha^a \alpha_k + \Gamma_\tau^a \tau_k \\ y_k &= C^a x_k^a + D_\alpha \alpha_k \end{aligned}$$

dove le nuove matrici  $\Phi^a$ ,  $\Gamma_u^a$ ,  $\Gamma_r^a$ ,  $C^a$  valgono ora

$$\Phi^a = \begin{bmatrix} \Phi & 0_{4 \times 1} \\ e_1^T & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_u^a = \begin{bmatrix} \Gamma_u \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_r^a = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C^a = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}$$

## 2.2 Regolazione LQ

Come noto dalla teoria del controllo ottimo, un sistema LTI  $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$  ammette uno e un solo controllo  $u_{[0,\infty)}$  tale da minimizzare il costo asintotico

$$J(x_0, u_{[0,\infty)}) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k$$

se sono soddisfatte le seguenti ipotesi:

1. la matrice di peso dello stato  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  è nonnulla e semidefinita positiva;
2. la matrice di peso dell'ingresso  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$  è definita positiva;
3. la coppia  $(A, B)$  è raggiungibile;
4. detto  $\sqrt{Q}$  il fattore di Cholesky<sup>1</sup> di  $Q$ , la coppia  $(A, \sqrt{Q})$  è osservabile.

In tal caso, la legge di controllo ottima (nel precedente senso) consiste di una retroazione statica dello stato del tipo

$$u_k = F x_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

dove il guadagno  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$  è dato dalla seguente espressione

$$F = -(R + B^T P B)^{-1} B^T P A$$

con matrice  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  unica soluzione semidefinita positiva della seguente ARE

$$P = A^T P A - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A + Q$$

## 2.3 Progetto del regolatore LQ

Il processo aumentato  $(\Phi^a, \Gamma_u^a)$  è raggiungibile: per convincersene è necessario e sufficiente calcolare il rango della relativa matrice di raggiungibilità

$$R := [\Gamma_u^a \mid \Phi^a \Gamma_u^a \mid (\Phi^a)^2 \Gamma_u^a \mid (\Phi^a)^3 \Gamma_u^a \mid (\Phi^a)^4 \Gamma_u^a]$$

e verificare, come è immediato fare, che sia pari a 5. Si può quindi determinare un regolatore stabilizzante per  $(\Phi^a, \Gamma_u^a)$  in modo da minimizzare il costo (1.8).

La scelta delle matrici peso  $Q$  e  $R$  è un compromesso tra prontezza e stabilità del sistema ad anello chiuso

$$Q := \text{diag}(10, 2000, 2, 2.5, 0.001) \quad R := 0.1$$

La matrice  $Q$  è definita diagonale per una questione di semplicità. Naturalmente la scelta garantisce l'osservabilità della coppia  $(\sqrt{Q}, \Phi^a)$ , la quale può essere immediatamente verificata andando a riscontrare il fatto che la matrice di osservabilità

$$O := [C^a \mid C^a \Phi^a \mid C^a (\Phi^a)^2 \mid C^a (\Phi^a)^3 \mid C^a (\Phi^a)^4]^T$$

è a rango pieno (dualità raggiungibilità/osservabilità). I valori numerici dei precedenti pesi sono determinati, dopo un consistente numero di prove, in modo da garantire che il trasferimento dello stato dall'equilibrio iniziale  $x^a(0) := [0.17 \ 0_{1 \times 4}]^T$  (pendolo bilanciato con carrello posizionato vicino al fincorsa delle rotaie) all'equilibrio finale  $x^a(\infty) = [r_{\text{sp}} = 0 \ 0_{1 \times 4}]^T$  (pendolo bilanciato con carrello posizionato all'origine delle rotaie) soddisfi le seguenti specifiche:

---

<sup>1</sup> $\sqrt{Q} : \sqrt{Q}^T \sqrt{Q} = Q$



$$\begin{aligned} |r| &\leq 0.2 \text{ m} & |\vartheta| &\leq 0.05 \text{ rad} & |u| &\leq 6 \text{ V} \\ |\dot{r}| &\leq 0.5 \text{ m/s} & |\dot{\vartheta}| &\leq 0.05 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

In base a quanto detto fino adesso, il guadagno ottimo  $F = [F_x \ F_w]$  si determina risolvendo il seguente problema

$$\begin{cases} P = (\Phi^a)^T P \Phi^a - (\Phi^a)^T P \Gamma_u^a (R + (\Gamma_u^a)^T P \Gamma_u^a)^{-1} (\Gamma_u^a)^T P \Phi^a + Q \\ P \geq 0 \\ [F_x \ F_w] = -(R + (\Gamma_u^a)^T P \Gamma_u^a)^{-1} (\Gamma_u^a)^T P \Phi^a \end{cases}$$

la soluzione può essere agevolmente determinata in ambiente MATLAB<sup>®</sup> applicando il comando `dlqr` alle matrici  $\Phi^a, \Gamma_u^a, Q, R$ . Il calcolo restituisce il seguente guadagno ottimo

$$[F_x \ F_w] = [35.7637 \ -175.1106 \ 35.3959 \ -32.2222 \ 0.0885]$$

che assegna gli autovalori del sistema ad anello chiuso in

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.8773 + 0.0474j & \lambda_2 &= 0.8773 - 0.0474j & \lambda_3 &= 0.9948 + 0.0000j \\ \lambda_4 &= 0.9967 + 0.0047j & \lambda_5 &= 0.9967 - 0.0047j \end{aligned}$$

in accordo alla teoria, tali autovalori appartengono alla regione di stabilità TD. Nella figura 2.3 è rappresentato il sistema ad anello chiuso

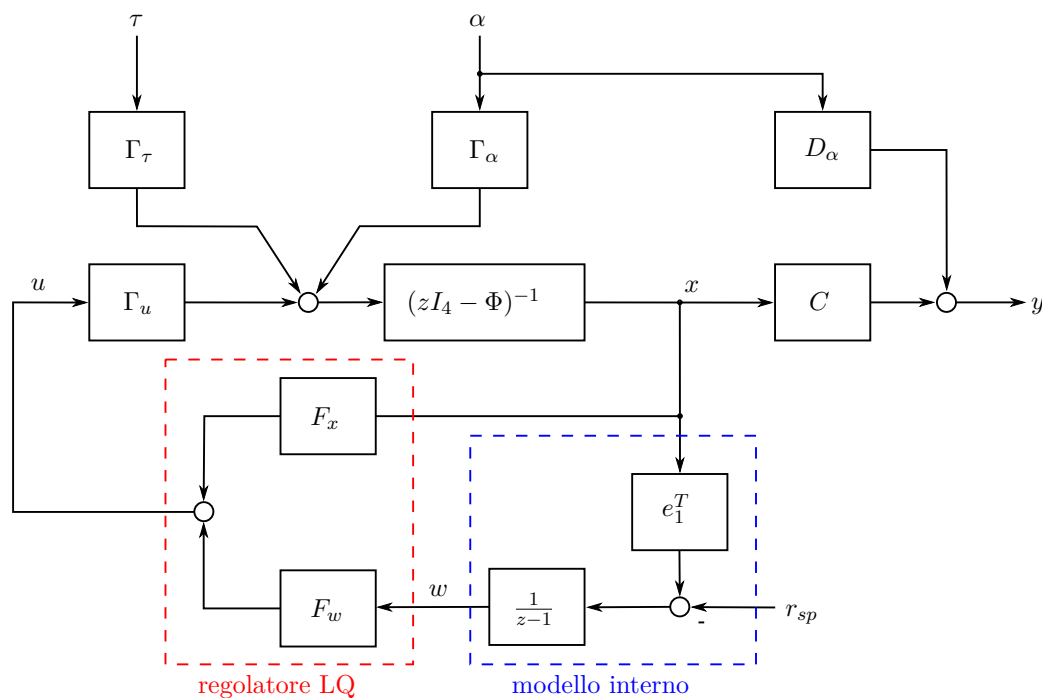


Figura 2.3: Schema a blocchi del sistema di controllo a regolazione statica LQ

Si osservi come l'azione integrale si trovi nel ramo di ritorno dell'anello rispetto al punto di iniezione del disturbo  $\alpha$ . Pertanto, come già detto, il sistema di controllo garantisce la reiezione di tale disturbo (e del disturbo di coppia) finché esso risulti essere al più lentamente variabile nel tempo.

## 2.4 Osservatore robusto

Essendo la variabile di stato  $x_4 = \dot{\vartheta}$  non disponibile, lo stato del processo ridotto  $(\Phi, \Gamma_u, C, D_\alpha)$  non è completamente accessibile. Occorre introdurre nel precedente sistema di controllo un osservatore con le seguenti proprietà:

1. la stima di  $x_4$  restituita sia “buona”, nel senso che l’errore di stima  $\tilde{x} := x_4 - \hat{x}$  converga a zero per  $t \rightarrow \infty$  (proprietà di asintoticità);
2. il sistema di controllo a regolazione dinamica sia internamente stabile;
3. il sistema di controllo a regolazione dinamica preservi, per quanto possibile, la robustezza del sistema di controllo a regolazione statica (proprietà di robustezza).

Una possibile soluzione esiste in quanto la coppia  $(\Phi, C)$  è osservabile. Tale soluzione si può trovare considerando un ossevatore della forma

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= Ev_k + Hu_k + My_k \\ \hat{x}_k &= L_1 y_k + L_2 v_k \end{aligned} \quad (2.1)$$

dove  $E \in \mathbb{R}^{o \times o}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{o \times m}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{o \times p}$ ,  $L_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $L_2 \in \mathbb{R}^{n \times o}$ . Nella presente trattazione si ha una sola variabile di stato da dover ricostruire, pertanto è sufficiente un osservatore ridotto di ordine  $o = 1$ . Si ha quindi  $E \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ ,  $L_1 \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ ,  $L_2 \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ .

Per condizioni iniziali nulle, la rappresentazione di stato nel dominio della frequenza del precedente osservatore è

$$\begin{aligned} v(z) &= (zI - E)^{-1}[Hu(z) + My(z)] \\ \hat{x}(z) &= L_1 y(z) + L_2 v(z) \end{aligned}$$

alla quale è associato lo schema a blocchi di figura 2.4

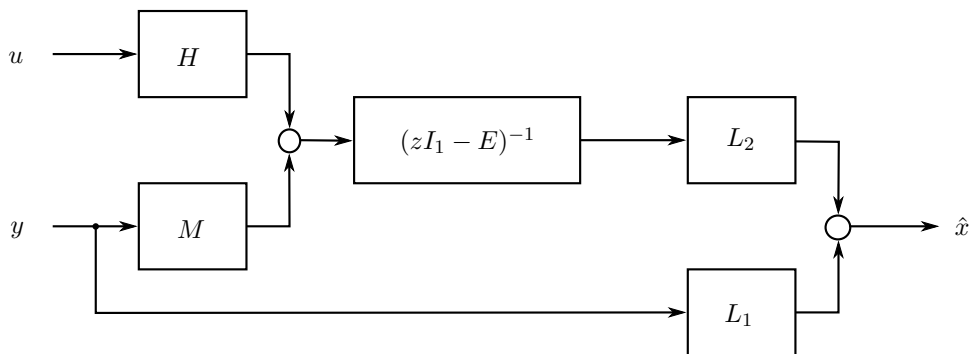


Figura 2.4: Schema a blocchi dell’osservatore robusto

La scelta dei parametri non è del tutto arbitraria ma è soggetta ai seguenti vincoli

$$T\Phi - ET - MC = 0 \quad (2.2)$$

$$H = T\Gamma_u \quad (2.3)$$

$$\begin{bmatrix} L_1 & L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.4)$$

dove  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  è una qualche matrice invertibile tale per cui esista l’inversa in (2.20).

## 2.5 Asintoticità dell'osservatore robusto

Si vuole adesso determinare sotto quali condizioni il precedente osservatore è asintotico. A tale proposito conviene studiare la dinamica dell'errore di stima. Trascurando i disturbi, le equazioni che caratterizzano il processo e l'osservatore sono

$$\text{processo: } \begin{cases} x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma_u u_k \\ y_k = C x_k \end{cases} \quad \text{osservatore: } \begin{cases} v_{k+1} = E v_k + H u_k + M y_k \\ \hat{x}_k = L_1 y_k + L_2 v_k \end{cases} \quad (2.5)$$

in base a tali equazioni è possibile determinare la legge ricorsiva a cui obbedisce l'errore di stima  $\tilde{x} := x - \hat{x}$ . Si ha che

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= x_{k+1} - \hat{x}_{k+1} \\ (1.7a) + (1.7b) &\rightarrow = \Phi x_k + \Gamma_u u_k - (L_1 y_{k+1} + L_2 v_{k+1}) \\ (1.7a) &\rightarrow = \Phi x_k + \Gamma_u u_k - (L_1 C x_{k+1} + L_2 v_{k+1}) \\ (1.7a) + (1.7b) &\rightarrow = \Phi x_k + \Gamma_u u_k - [L_1 C (\Phi x_k + \Gamma_u u_k) + L_2 (E v_k + H u_k + M y_k)] \\ (1.21a) &\rightarrow = \Phi x_k + \Gamma_u u_k - [L_1 C (\Phi x_k + \Gamma_u u_k) + L_2 (E v_k + H u_k + M C x_k)] \\ &= (I - L_1 C) (\Phi x_k + \Gamma_u u_k) - L_2 E v_k - L_2 H u_k - L_2 M C x_k \end{aligned} \quad (2.6)$$

Sfruttando adesso le relazioni

$$\begin{aligned} T\Phi - ET - MC = 0 &\Leftrightarrow \Phi = T^{-1}ET + T^{-1}MC \\ \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}^{-1} \Leftrightarrow I - L_1 C = L_2 T \end{aligned} \quad (2.7)$$

(2.8) diventa

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= L_2 T [(T^{-1}ET + T^{-1}MC)x_k + \Gamma_u u_k] - L_2 E v_k - L_2 T \Gamma_u u_k - L_2 M C x_k \\ &= L_2 E T x_k - L_2 E v_k = L_2 E (T x_k - v_k) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ora, osservando da (2.9) che

$$T = L_2^{-1}(I - L_1 C)$$

si trova che

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= L_2 E [(L_2^{-1}(I - L_1 C)x_k - v_k)] \\ &= L_2 E L_2^{-1} x_k - L_2 E L_2^{-1} L_1 y - L_2 E v_k \\ &= L_2 E L_2^{-1} x_k - L_2 E L_2^{-1} L_1 y - L_2 E L_2^{-1} L_2 v_k \\ &= L_2 E L_2^{-1} (x_k - L_1 y - L_2 v_k) = L_2 E L_2^{-1} [x_k - (L_1 y + L_2 v_k)] \\ &= L_2 E L_2^{-1} (x_k - \hat{x}_k) = L_2 E L_2^{-1} \tilde{x}_k \end{aligned}$$

Le matrici  $E$  e  $L_2 E L_2^{-1}$  sono simili tra loro, pertanto si può dire che la trasformazione  $E \mapsto L_2 E L_2^{-1}$  preserva il polinomio caratteristico. La conclusione pertanto è la seguente: l'osservatore (2.1) soggetto ai vincoli (2.2), (2.3), (2.4) è asintotico sse

$$\text{Sp}(E) \subset \mathbb{C}_s \quad (2.9)$$

Nella presente trattazione la matrice di stato  $E$  è scalare, pertanto la condizione di asintoticità precedente si riduce a  $|E| < 1$ .

## 2.6 Stabilità interna della regolazione dinamica

La stabilità del sistema di controllo a regolazione dinamica può essere analizzata esaminando la posizione nel piano complesso TD degli autovalori ad anello chiuso. Si deve dunque determinare la relativa matrice di stato. Nella figura 2.5 si riporta il sistema di controllo da analizzare

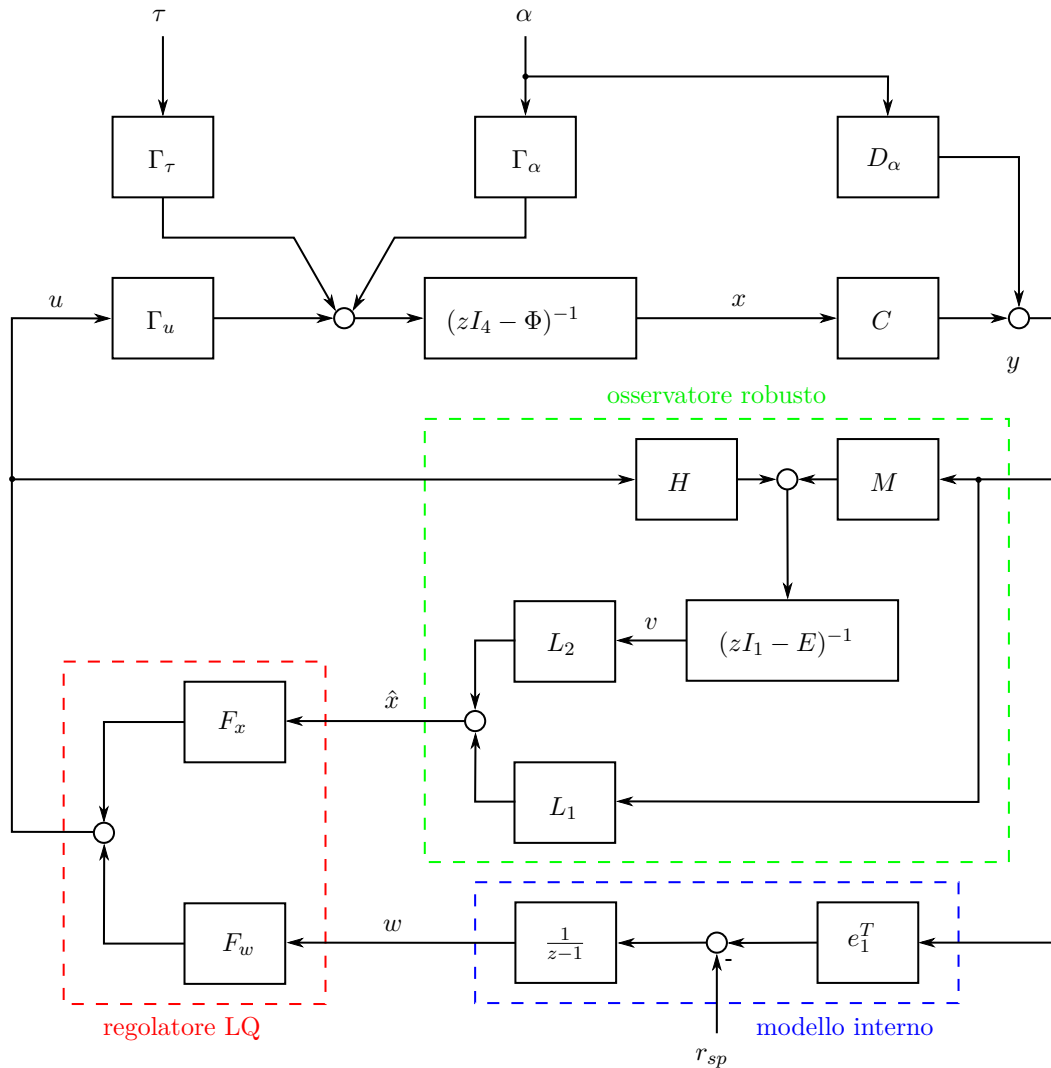


Figura 2.5: Schema a blocchi del sistema di controllo a regolazione dinamica

In linea di principio, lo stato del sistema di controllo è definito dagli stati degli elementi dinamici che lo costituiscono, ossia il processo, il modello interno del disturbo  $\alpha$  e l'osservatore, per un totale di  $4+1+1 = 6$  variabili di stato. Conviene comunque definire lo stato del sistema in modo "ridondante" per mezzo del vettore a  $4 + 1 + 4 = 9$  componenti

$$X := \begin{bmatrix} x^T & w & \tilde{x}^T \end{bmatrix}^T \quad (2.10)$$

dalla figura 2.5 si perviene alla seguente equazione di stato

$$X_{k+1} = \mathcal{A}X_k + \mathcal{B}r_{sp} \quad (2.11)$$

dove le matrici  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ ,  $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{9 \times 1}$  sono date da

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \Phi + \Gamma_u F_x & \Gamma_u F_w & -\Gamma_u F_x \\ e_1^T & 1 & 0 \\ 0_{1 \times 4} & 0 & L_2 E L_2^{-1} \end{bmatrix} \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 1} \\ -1 \\ 0_{4 \times 1} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

La forma triangolare superiore della matrice di stato  $\mathcal{A}$  chiarisce il fatto che l'osservatore considerato soddisfa il principio di separazione. Si conclude dunque che, in generale, la condizione di asintoticità (2.11) garantisce anche la stabilità interna del sistema di controllo a regolazione dinamica.

## 2.7 Loop transfer recovery (LTR)

Si vuole adesso provare che l'osservatore robusto ( $E, H = 0, M, L_1, L_2$ ) non comporta alcuna degradazione delle proprietà di stabilità nel passaggio dallo schema a regolazione statica allo schema a regolazione dinamica (*Full LTR*). A tal proposito si determinano prima le DdR  $F^{\text{st}}$  e  $F^{\text{din}}$  dei due sistemi di controllo, per poi mostrare che per  $H = 0$  la DdR  $F^{\text{din}}$  si riduce alla DdR  $F^{\text{st}}$ .

Poste le seguenti definizioni

$$\begin{aligned} \Lambda(z) &:= (zI - \Phi)^{-1} \\ K^{\text{st}}(z) &:= F_x + F_w e_1^T (z - 1)^{-1} \\ K^{\text{din}}(z) &:= [1 + F_x L_2 (zI_1 - E)^{-1} H]^{-1} \{ F_x [L_1 + L_2 (zI_1 - E)^{-1} M] + F_w e_1^T (z - 1)^{-1} \} \end{aligned}$$

e trascurando gli ingressi  $r_{\text{sp}}, \alpha, \tau$ , gli schemi di controllo nelle figure 2.3 e 2.5 possono essere sintetizzati in figura 2.6

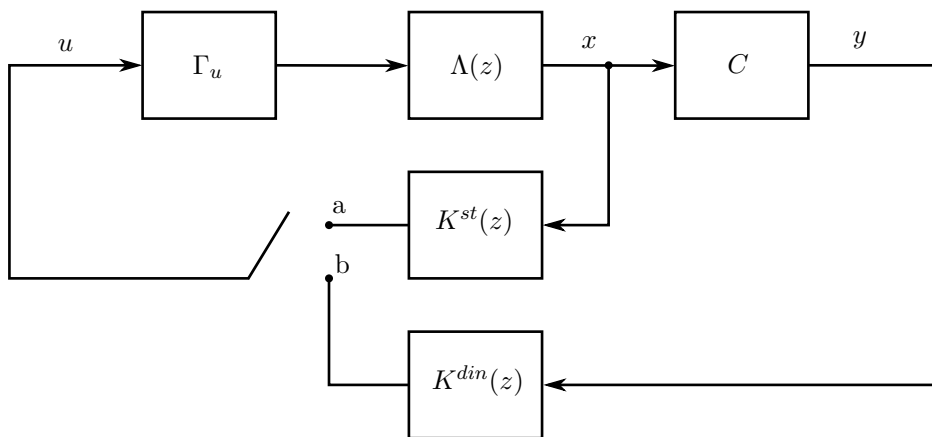


Figura 2.6: Rappresentazioni equivalenti del sistema di controllo o a regolazione statica (a) o a regolazione dinamica (b)

Si noti come  $K^{\text{st}}(z)$  rappresenti la matrice di trasferimento del regolatore statico, mentre  $K^{\text{din}}(z)$  è la matrice di trasferimento del regolatore dinamico.

Per quanto riguarda la regolazione statica (deviatore connesso al terminale a), dalla figura 1.6 si capisce che

$$\begin{aligned} x(z) &= \Lambda(z) \Gamma_u u(z) \\ u(z) &= K^{\text{st}}(z) x(z) \end{aligned}$$

Dunque le matrici di trasferimento dall'ingresso  $u$  allo stato  $x$  e viceversa sono rispettivamente

$$G_{ux}(z) := \Lambda(z)\Gamma_u(z) \quad G_{xu}(z) := K^{\text{st}}(z)$$

Si supponga adesso di iniettare un segnale esogeno  $w$  additivamente allo stato  $x$  del processo. Per la regola di Mason, la sensitività  $T_{wu}^{\text{st}}$  dal segnale  $w$  all'ingresso  $u$  del processo è pari a

$$\begin{aligned} T_{wu}^{\text{st}}(z) &= [I_1 - G_{ux}(z)G_{xu}(z)]^{-1}G_{ux}(z) \\ &= [1 - K^{\text{st}}(z)\Lambda(z)\Gamma_u]^{-1}K^{\text{st}}(z) \end{aligned}$$

pertanto si deduce che nel caso di regolazione statica la DdR all'ingresso del processo è

$$\begin{aligned} F^{\text{st}}(z) &= 1 - K^{\text{st}}(z)\Lambda(z)\Gamma_u \\ &= 1 - [F_x + F_w e_1^T (z-1)^{-1}] (zI_4 + \Phi)^{-1} \Gamma_u \end{aligned}$$

si tenga presente che si sarebbe giunti allo stesso risultato presupponendo diverse posizioni per i punti di iniezione e prelievo dei segnali nell'anello. Il vantaggio della scelta di iniettare  $w$  su  $x$  e prelevare  $u$  consiste nel fatto che il relativo guadagno di anello all'ingresso del processo, i.e.  $L^{\text{st}}(z) = -K^{\text{st}}(z)\Lambda(z)\Gamma_u$ , è semplicemente uno scalare.

Dal lato del sistema di controllo a retroazione dinamica, sempre dalla figura 2.6, si ha invece che

$$\begin{aligned} x(z) &= \Lambda(z)\Gamma_u u(z) \\ u(z) &= K^{\text{din}}(z)Cx(z) \end{aligned}$$

Dunque le matrici di trasferimento dallo stato  $x$  all'ingresso  $u$  deve essere aggiornata come segue

$$G_{xu}^{\text{din}}(z) := K^{\text{din}}(z)C$$

seguendo il precedente procedimento si trova adesso

$$\begin{aligned} T_{wu}^{\text{din}}(z) &= [I_1 - G_{ux}^{\text{din}}(z)G_{xu}^{\text{din}}(z)]^{-1}G_{ux}^{\text{din}}(z) \\ &= [1 - K^{\text{din}}(z)C\Lambda(z)\Gamma_u]^{-1}K^{\text{din}}(z)C \end{aligned}$$

Quindi la DdR all'ingresso del processo nel caso di regolazione dinamica è

$$\begin{aligned} F^{\text{din}}(z) &= 1 - K^{\text{din}}(z)C\Lambda(z)\Gamma_u \\ &= 1 - [1 - F_x L_2 (zI_1 - E)^{-1} H]^{-1} f(z) \end{aligned} \quad (2.13)$$

dove, per comodità, si è posto

$$f(z) := \{F_x [L_1 + L_2 (zI_1 - E)^{-1} M] + F_w e_1^T (z-1)^{-1}\} C (zI_4 + \Phi)^{-1} \Gamma_u$$

Quest'ultimo termine può essere semplificato sfruttando le relazioni (2.4), (2.5), (2.6). Sviluppando i vari prodotti<sup>2</sup> che figurano al secondo membro si trova

$$\begin{aligned} f(z) &= F_x L_1 C (zI_4 - \Phi)^{-1} \Gamma_u + F_x L_2 (zI_1 - E)^{-1} M C (zI_4 - \Phi)^{-1} \Gamma_u \\ &\quad + F_w e_1^T (z-1)^{-1} (zI_4 - \Phi)^{-1} \Gamma_u \end{aligned}$$

<sup>2</sup>si tenga presente che nel prodotto  $e_1^T C = e_1^T$  il vettore a primo membro ha tre componenti, mentre l'altro quattro

Quindi osservando che, in virtù di (2.4), vale l'identità

$$(zI_1 - E)^{-1}MC(zI_4 - \Phi)^{-1} = T(zI_4 - \Phi)^{-1} - (zI_1 - E)^{-1}T$$

si ha che

$$\begin{aligned} f(z) &= F_x L_1 C (zI_4 - \Phi)^{-1} \Gamma_u + F_x L_2 [T(zI_4 - \Phi)^{-1} - (zI_1 - E)^{-1} T] \Gamma_u \\ &\quad + F_w e_1^T (z-1)^{-1} (zI_4 - \Phi)^{-1} \Gamma_u \\ &= F_x (L_1 C + L_2 T) (zI_4 - \Phi)^{-1} \Gamma_u - F_x L_2 (zI_1 - E)^{-1} T \Gamma_u \\ &\quad + F_w e_1^T (z-1)^{-1} (zI_4 - \Phi)^{-1} \Gamma_u \end{aligned}$$

Sfruttando adesso le relazioni (2.5) e (2.6) si giunge all'espressione finale di  $f(z)$

$$\begin{aligned} f(z) &= F_x (zI_4 - \Phi)^{-1} \Gamma_u - F_x L_2 (zI_1 - E)^{-1} H + F_w e_1^T (z-1)^{-1} (zI_4 - \Phi)^{-1} \Gamma_u \\ &= [F_x + F_w e_1^T (z-1)^{-1}] (zI_4 - \Phi)^{-1} \Gamma_u - F_x L_2 (zI_1 - E)^{-1} H \end{aligned}$$

Dunque, in conclusione, la DdR (2.18) del sistema di controllo a regolazione dinamica si riscrive come

$$F^{\text{din}}(z) = 1 - [1 - F_x L_2 (zI_1 - E)^{-1} H]^{-1} \{ [F_x + F_w e_1^T (z-1)^{-1}] (zI_4 - \Phi)^{-1} \Gamma_u - F_x L_2 (zI_1 - E)^{-1} H \}$$

Da questa espressione si capisce chiaramente che per  $H = 0$  sussiste l'uguaglianza  $F^{\text{din}}(z) = F^{\text{st}}(z)$ , per tanto in tale situazione il sistema di controllo a regolazione dinamica gode delle medesime proprietà di stabilità del sistema di controllo a regolazione statica.

Tuttavia si può dimostrare che in generale l'osservatore robusto ( $E, H = 0_{o \times m}, M, L_1, L_2$ ) può essere impiegato solamente per stimare lo stato di processi  $(\Phi, \Gamma_u, C)$  osservabili e non aventi zeri invarianti. In questi casi "patologici" si può comunque ottenere un LTR approssimato scegliendo opportunamente la matrice  $H$  sufficientemente "piccola". Il processo in esame non presenta zeri invarianti, dunque si procede progettando un osservatore per cui  $H = 0$  in modo da recuperare esattamente le proprietà di stabilità dello schema a retroazione LQ.

Si osservi dalla figura 2.5 come nel ramo di retroazione sia presente una seconda retroazione del segnale di controllo  $u$  verso l'osservatore. L'anello che si forma nel ramo di retroazione è la causa della degradazione dei margini di stabilità da parte della regolazione dinamica rispetto alla regolazione statica, che può essere studiata tramite l'equazione (2.44). L'effetto della scelta  $H = 0$  comporta l'apertura dell'anello presente nel ramo di retroazione, con conseguente pieno recupero dei margini di stabilità statici da parte della sistema di controllo a regolazione dinamica.

## 2.8 Progetto dell'osservatore robusto

L'idea per il progetto dell'osservatore consiste nel fissare  $|E| < 1$  (asintoticità dell'osservatore, stabilità del controllo) e  $H = 0$  (robustezza del controllo) per poi determinare conseguentemente  $M, L_1, L_2$  in modo da soddisfare i vincoli (2.4), (2.5) e (2.6). Una scelta per l'autovalore dell'osservatore che rappresenta un buon compromesso tra prestazioni e insensibilità ai disturbi è  $E = 0.9$ .

Il generico problema di progetto dell'osservatore robusto (2.16) è

$$\left\{ \begin{array}{l} T\Phi - ET - MC = 0 \\ T\Gamma_u = H \\ [L_1 \quad L_2] = [C]^{-1} \\ T : \det \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} = 4 \end{array} \right.$$

il quale può essere risolto determinando prima i vettori riga  $T = [t_1 \ t_2 \ t_3 \ t_4]$  e  $M = [m_1 \ m_2 \ m_3 \ m_4]$  e poi, in modo separato, le matrici  $L_1$  e  $L_2$  sfruttando il terzo vincolo. Si considerino dunque i primi due vincoli: ordinando i vettori  $T$  e  $M$  nella colonna  $\beta = [T^T M^T]^T$  tali vincoli possono essere riscritti in notazione compatta come

$$S_1 \beta = \begin{bmatrix} 0_{1 \times 4}^T & H \end{bmatrix}^T \quad (2.14)$$

dove la matrice  $S_1 \in \mathbb{R}^{(n+1)o \times (n+p)o}$  è definita come

$$S_1 := \begin{bmatrix} I_E \otimes \Phi^T - E \otimes I_\Phi & -I_E \otimes C^T \\ I_E \otimes \Gamma_u^T & 0_{o \times po} \end{bmatrix}$$

Il simbolo “ $\otimes$ ” denota il prodotto tensoriale di Kronecker, mentre la matrice  $I_{M_g}$  denota l'identità di dimensione compatibile con la generica matrice quadrata  $M_g$ . Nell'attuale problema la matrice  $E$  è semplicemente uno scalare, quindi la definizione di  $S_1$  si riduce a

$$S_1 := \begin{bmatrix} \Phi^T - EI_4 & -C^T \\ \Gamma_u^T & 0_{1 \times 3} \end{bmatrix}$$

L'equazione vettoriale (2.19) consiste di 5 equazioni in 7 incognite contenute nel vettore  $\beta$ , pertanto è sottodeterminata. Una prima equazione da accostare alle (2.19) si trova dal quarto vincolo del problema, che in termini espliciti prende la forma

$$T : \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{bmatrix} = 4$$

Il vincolo è soddisfatto a patto che  $t_4 \neq 0$  quindi, per semplicità, si può fissare  $t_4 = 1$ , ossia in termini del vettore  $\beta$

$$e_4^T \beta = 1 \quad (2.15)$$

La seconda equazione da accostare a (2.19) si definisce in modo da rendere la dinamica dell'osservatore indipendente dalla posizione del carrello, rendendo così l'intero sistema di controllo indipendente da tale variabile di stato. Si tratta di annullare il peso  $m_1$ , quindi in termini del vettore  $\beta$

$$e_5^T \beta = 0 \quad (2.16)$$

Il sistema che si trova accostando a (2.19) la (2.20) e la (2.21) è quadrato (7 per 7) e lo si può rappresentare come l'unica equazione vettoriale

$$S\beta = q$$



dove si sono definiti

$$S := \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} \quad S_2 := \begin{bmatrix} e_4^T \\ e_5^T \end{bmatrix} \quad q =: \begin{bmatrix} 0_{4 \times 1} \\ H \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Supponendo  $S$  invertibile, le matrici  $T$  e  $M$  sono date rispettivamente dalla prime 4 e ultime 3 componenti del vettore

$$\beta = S^{-1}q$$

I restanti due parametri  $L_1$  e  $L_2$  si trovano prima invertendo la matrice  $[C \ T]^T$ , poi estraendo dalla matrice risultante  $L = [L_1 \ L_2]$  le prime 3 colonne ( $L_1$ ) e la 4a colonna ( $L_2$ ).

Il procedimento appena descritto per il dimensionamento dell'osservatore robusto si implementa facilmente in ambiente MATLAB® sotto forma della function `robs`.

Listing 2.1: Function `robs`

```

1 function[M,L1,L2]=robs(Phi,Gamma_u,E,H)
2     C=[eye(3) zeros(3,1)];           % definizione C
3     S1=[Phi'-E*eye(4) -C';Gamma_u' zeros(1,3)]; % definizione S1
4     S2=[[0 0 0 1 0 0 0];[0 0 0 0 1 0 0]]; % definizione S2
5     S=[S1;S2];                       % definizione S
6     q=[zeros(4,1);H;1;0];           % definizione q
7     beta=(S\q)';                    % calcolo beta
8     T=beta(1:4);                    % estrazione T
9     M=beta(5:7);                    % estrazione M
10    L=inv([C; T]);                   % calcolo L
11    L1=L(:,1:3);                     % estrazione L1
12    L2=L(1:4,4:4);                   % estrazione L2

```

Fissando  $E = 0.9$  e  $H = 0$  si ottiene una matrice  $S$  invertibile, quindi passando tali parametri alla precedente function si trovano i seguenti risultati numerici

$$M = \begin{bmatrix} 0.0000 & -1.9586 & -0.1397 \end{bmatrix} \quad L_1 = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \\ 0 & 20.0223 & 1.3965 \end{bmatrix} \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$$

Si osservi come in corrispondenza delle prime 3 righe di  $L_1$  e  $L_2$  siano presenti rispettivamente una identità e un vettore nullo, per cui  $\hat{x}_i = y_i$  per  $i = 1, 2, 3$ . Questo fatto non è sorprendente in quanto  $y_i = x_i$  per  $i = 1, 2, 3$ , quindi è sufficiente stimare lo stato con l'uscita del processo. Viceversa  $x_4$  deve essere ricostruita dall'osservatore, dunque la sua stima  $\hat{x}_4$  è determinata dinamicamente combinando linearmente l'uscita  $y$  del processo, pesata secondo la quarta riga di  $L_1$ , con lo stato  $v$  dell'osservatore, pesato secondo la quarta riga di  $L_2$ .

## 2.9 Progetto dei filtri PB e AA

Occorre prestare attenzione nel dimensionamento dei filtri, in quanto una scelta errata per le frequenze di taglio può destabilizzare il sistema di controllo. Un limite superiore per la scelta delle frequenze di taglio, a causa del campionamento, è la metà della frequenza di campionamento  $f_s = 1/T$ , che nella presente trattazione vale  $1/(5 \text{ ms}) = 100 \text{ Hz}$ .

Il metodo che si utilizza per il dimensionamento dei filtri consiste nello studiare i margini di fase del sistema di controllo al variare delle frequenze di taglio  $a_{in}, a_{out}$ . Si deve dunque

determinare il guadagno di anello  $L_{\text{fil}}(z)$  del sistema di controllo corrente. A tale proposito si può osservare che l'unica differenza tra l'anello senza filtri e l'anello con i filtri è il processo controllato, quindi per determinare la DdR del sistema di controllo includente i filtri è sufficiente riscrivere l'equazione (2.46) in termini di  $(\Phi^e, \Gamma_u^e, C^e, 0)$ . Posto  $\Lambda^e(z) := (zI_8 - \Phi^e)^{-1}$ , si ha che

$$F^{\text{fil}}(z) = 1 - K^{\text{din}}(z)C^e\Lambda^e(z)\Gamma_u^e \Rightarrow L_{\text{fil}}(z) = -K^{\text{din}}(z)C^e\Lambda^e(z)\Gamma_u^e$$

una buona scelta per le frequenze di taglio è  $a_{\text{in}} = 259.4707$  rad/s e  $a_{\text{out}} = 227.2727$  rad/s, la quale comporta, come mostrato nel capitolo successivo, un margine di fase di circa  $45^\circ$ .

## 2.10 Compensazione dell'attrito coulombiano

Come già osservato nel capitolo precedente, a causa della non conoscenza del coefficiente  $F_s$  e a causa dell'effetto del campionamento non è chiaro come poter reiettare asintoticamente il disturbo in questione. Ispirandosi alla (1.17), si sceglie dunque euristicamente la seguente legge di controllo in parte non lineare

$$u = K^{\text{din}}v_{\text{out}} + u_{\text{nl}} \quad u_{\text{nl}} = \Psi \text{sign}(e_3^T v_{\text{out}}), \Psi \in \mathbb{R}$$

ottenendo così il sistema di controllo in figura<sup>3</sup> 2.7

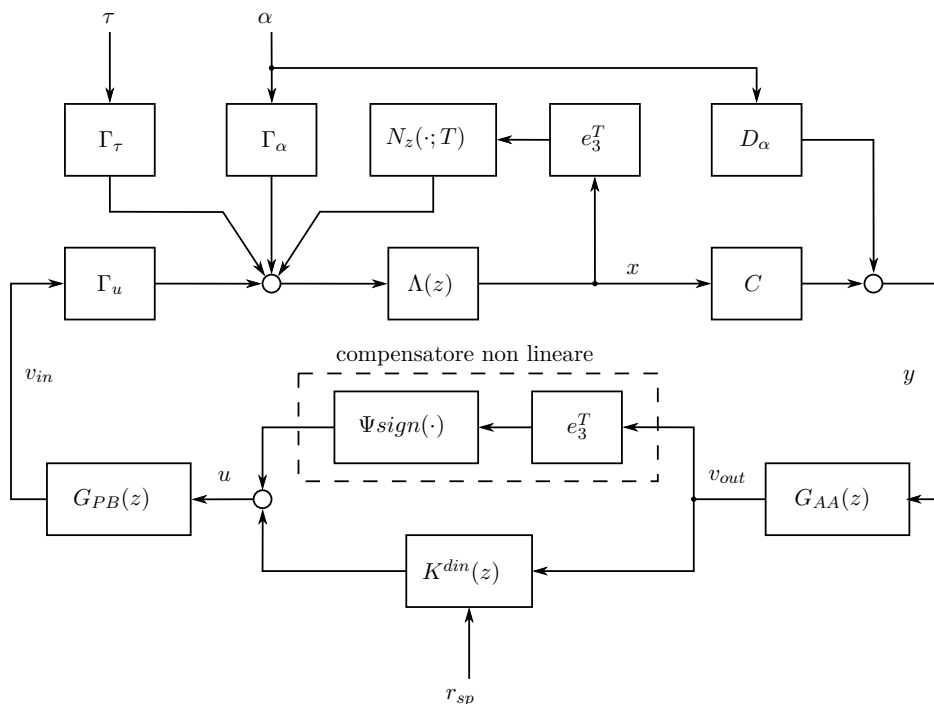


Figura 2.7: Sistema di controllo con compensazione dell'attrito coulombiano

Il grado di libertà rappresentato dal guadagno scalare  $\Psi$  si determina per tentativi successivi sperimentalmente. Nella presente trattazione, come giustificato successivamente, si fissa  $\Phi \approx 0.5$ . Si ricorda che la semplice definizione della parte non lineare della legge di controllo scelta non porta alla reiezione esatta di tale disturbo, ma si limita a solamente a ridurne l'intensità.

<sup>3</sup>Per praticità di notazione si sono definite le matrici di trasferimento dei filtri come  $G_{\text{PB}}(z) := (zI_1 + a_{\text{in}})^{-1}a_{\text{in}}$  e  $G_{\text{AA}}(z) := (zI_3 + a_{\text{out}})^{-1}a_{\text{out}}$

## 2.11 Swing-Up

I sistemi di controllo sono stati progettati assumendo l'ipotesi restrittiva  $\theta \approx 0$ , il che limita notevolmente l'insieme delle configurazioni iniziali per le quali il sistema di controllo riesce a stabilizzare all'equilibrio instabile il processo. La difficoltà può essere completamente superata determinando una legge di controllo in grado di trasferire il processo dallo stato di equilibrio stabile, ossia  $x_{\text{stab}} = [r_0 \ \pi \ 0 \ 0]^T$ , all'intorno dello stato di equilibrio instabile  $x_{\text{instab}} = [r_0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ . Il problema che ne deriva prende il nome di *swing-up*. Così facendo, dato un qualsiasi angolo iniziale  $\theta_0$  è possibile stabilizzare il processo all'equilibrio instabile seguendo tre passi successivi:

- non applicando alcun controllo, attendere che lo stato del processo si stabilizzi a  $x_{\text{stab}}$
- attivare il controllo swing-up in modo da trasferire lo stato da  $x_{\text{stab}}$  verso  $x_{\text{instab}}$
- passare dal controllo swing-up al controllo stabilizzante determinato in precedenza

L'idea per risolvere il problema dello swing-up consiste nel determinare un ingresso  $u$  che inietti progressivamente energia nel pendolo, così da portarla dal livello minimo che caratterizza l'equilibrio stabile, cioè  $\mathcal{E}_{\text{stab}} = 0$ , al livello che caratterizza l'equilibrio instabile, cioè  $\mathcal{E}_{\text{instab}} = m_p l g$ . In effetti quello che si vuole adesso determinare è un controllo di energia.

Supponendo  $\alpha \approx 0$ , l'espressione dell'energia meccanica, priva del termine traslazionale (volutamente trascurato al fine di provocare un solo aumento di energia cinetica rotazionale),  $\mathcal{E}$  è data da

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(J_p + m_p l^2)\dot{\vartheta}^2 + m_p g l \cos \vartheta = \frac{1}{2}(J_p + m_p l^2)x_4^2 + m_p g l \cos x_2$$

dalla quale segue che la dinamica dell'errore di energia  $\tilde{\mathcal{E}} := \mathcal{E} - \mathcal{E}_{\text{instab}}$  obbedisce all'equazione differenziale

$$\dot{\tilde{\mathcal{E}}} = (J_p + m_p l^2)\dot{\vartheta}\ddot{\vartheta} - m_p g l \sin \vartheta \dot{\vartheta} = (J_p + m_p l^2)\dot{x}_4 - m_p g l \sin x_2 x_4$$

la dipendenza di  $\dot{\tilde{\mathcal{E}}}$  dall'ingresso  $u$  è descritta implicitamente dalla definizione di  $\dot{x}_4$ , la quale è data dalle equazioni di moto in grande del processo. Trascurando i termini di attrito, l'espressione di  $\dot{x}_4$  si riduce a

$$\dot{x}_4 = (\det \mathcal{M})^{-1} [m_p l \cos x_2 a u - (m_p l^2) \cos x_2 \sin x_2 x_4^2 + (M_c + m_p) m_p l g \sin x_2]$$

quindi l'espressione di  $\dot{\tilde{\mathcal{E}}}$  assume la forma

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathcal{E}}} &= (\det \mathcal{M})^{-1} \{ (J_p + m_p l^2) x_4 [m_p l \cos x_2 a u - (m_p l^2) \cos x_2 \sin x_2 x_4^2] \\ &\quad + (m_p l \cos x_2)^2 m_p g l \sin x_2 x_4 \} \end{aligned}$$

che può essere semplificata mediante una opportuna scelta della legge di controllo  $u$ . Fissando

$$\begin{aligned} u &:= u_{\text{su}} + u_{\text{c1}} + u_{\text{c2}} \\ u_{\text{c1}} &:= \frac{m_p l \sin x_2 x_4^2}{a} \\ u_{\text{c2}} &:= -\frac{(m_p l)^2 g \sin x_2 \cos x_2}{(J_p + m_p l^2) a} \end{aligned}$$

si trova infatti

$$\dot{\tilde{\mathcal{E}}} = (\det \mathcal{M})^{-1} (J_p + m_p l^2) m_p l x_4 \cos x_2 a u_{\text{su}}$$

Si può quindi agire sulla dinamica dell'errore di energia  $\tilde{E}$  per mezzo della legge di controllo  $u_{\text{su}}$ . Una buona scelta, ossia tale da rendere nullo l'errore per  $t \rightarrow \infty$ , si trova nell'ipotesi  $x_4 \cos x_2 \neq 0$  fissando

$$u_{\text{su}} := -g(x)\text{sign}(x_4 \cos x_2)\mathcal{E}$$

dove  $g(x) > 0$  è una qualsiasi funzione positiva dello stato del processo. In tal caso, infatti, si ha che l'errore di energia obbedisce alla legge differenziale

$$\dot{\tilde{E}} = -(\det \mathcal{M})^{-1}(J_p + m_p l^2)m_p l a |x_4 \cos x_2| g(x)\mathcal{E}$$

la cui soluzione è esponenzialmente convergente a zero per  $t \rightarrow \infty$ . Una semplice scelta, che corrisponde ad un controllo di tipo proporzionale, è rappresentata da

$$g(x) := k_{\text{su}}$$

dove  $k_{\text{su}}$  è una costante positiva. La legge di controllo che ne deriva può assumere un'intensità arbitrariamente grande, quindi, al fine di modellare l'effetto di saturazione dovuto alla coppia finita erogabile dal motore di attuazione, è opportuno completare la definizione del controllo swing-up come

$$u_{\text{su}} := -\text{sat}_{\beta g}(k_{\text{su}}\mathcal{E})\text{sign}(x_4 \cos x_2)$$

dove  $\text{sat}_{\beta g}$  è la funzione di saturazione con soglia  $\beta g$  ( $g$  accelerazione di gravità). Il controllo swing-up è per tanto un controllo di tipo proporzionale per piccoli errori di energia, mentre è un controllo di tipo bang-bang per grandi errori di energia.

Si noti il fatto che la legge di controllo swing-up ha validità sotto l'ipotesi  $x_4 \cos x_2 \neq 0$ , che non è verificata dallo stato di equilibrio stabile. In linea di principio quindi, assumendo come condizione iniziale lo stato di equilibrio stabile il sistema di controllo non è in grado di trasferire lo stato del pendolo all'equilibrio instabile. Tale difficoltà può essere semplicemente superata applicando inizialmente un qualsiasi ingresso, anche piccolo, che alteri lo stato iniziale del processo, così da attivare il controllo swing-up.

Dal punto di vista numerico, i parametri  $\beta, k$  sono fissati rispettivamente a  $0.4\text{Vs}^2/m$  e  $0.7$  rad/s sulla base di più test in fase di simulazione.

Un problema legato allo swing-up scelto consiste nel fatto che il carrello può assumere posizioni arbitrariamente distanti dall'origine delle rotaie, quindi violarne i limiti fisici dovuti ai fine corsa. Si risolve introducendo nella legge di controllo degli opportuni termini penalizzanti  $|r|$  grandi, come mostrato più avanti.

## 2.12 Osservatore non lineare

Il controllo swing-up presuppone la conoscenza dell'intero stato  $x$  del processo, il quale, come già appurato, non è completamente disponibile. Non è possibile ricostruire la velocità angolare del pendolo tramite l'osservatore robusto progettato in quanto il processo, inizialmente distante dall'equilibrio instabile, non ha un comportamento di tipo lineare. Occorre quindi progettare un osservatore in grado di ricostruire la velocità angolare del pendolo senza prescindere dall'ipotesi di linearità del processo.

Non essendo presente alcun rumore nel modello considerato, una possibile soluzione si può ottenere filtrando la posizione angolare del pendolo secondo un derivatore analogico, la cui funzione di trasferimento è

$$G_{\text{der}}(s) = \frac{k_\tau}{1 + k_\tau/s}$$

Il dispositivo si comporta come un derivatore ideale nella banda  $[0, k_\tau]$  rad/s, quindi la qualità della stima fornita dall'osservatore è crescente con la pulsazione di taglio  $k_\tau$ .

Dal lato numerico, tale valore è fissato a 1000 rad/s, che rappresenta il limite oltre il quale in fase di simulazione si genera instabilità numerica.

### 2.13 Commutatore

Un possibile criterio di commutazione dal controllo iniziale swing-up al controllo finale stabilizzante è rappresentato da

$$\vartheta \approx 2p\pi \quad \forall p \in \mathbb{Z}$$

che è equivalente alla coppia di condizioni

$$\begin{aligned} |\sin \vartheta| &\leq \text{soglia}_1 \\ \cos \vartheta &\leq \text{soglia}_2 \end{aligned}$$

tuttavia tale criterio può provocare un numero eccessivo di commutazioni da un controllo all'altro. Un risultato migliore si trova considerando un ulteriore vincolo posto sulla velocità angolare

$$\dot{\vartheta} \leq \text{soglia}_3$$

Naturalmente, per il solito problema di non completa disponibilità dello stato del processo, il confronto è eseguito non sul valore reale della velocità angolare del pendolo bensì sulla stima fornita dall'osservatore non lineare.

I valori numerici scelti per le soglie sono rispettivamente 0.5 rad per  $\text{soglia}_1$  e  $\text{soglia}_2$ , mentre 3 rad/s per  $\text{soglia}_3$ . La scelta è frutto di più prove in fase di simulazione. Dato che la commutazione da un controllo all'altro avviene per mezzo di numerosi rimbalzi, occorre approfondire la questione legata al fatto che il controllo stabilizzante si riattiva più volte durante il funzionamento del sistema di controllo. Il controllo stabilizzante consiste di numerosi sottosistemi dinamici (filtro PB, filtri AA, modello interno, 'osservatore robusto) i quali evolvono secondo il proprio stato. Idealmente, all'attivazione del controllo stabilizzante gli stati dei precedenti sottosistemi devono trovarsi zero, dunque è necessario determinare un opportuno comando di reset. Per quanto riguarda il modello interno, sistema digitale, è possibile agire direttamente sulla definizione del relativo stato, mentre per i filtri, sistemi analogici, il reset si ottiene applicando un ingresso nullo ed attendendo qualche costante di tempo.

### 2.14 Limitatore

Dai risultati numerici delle simulazioni si osserva che il controllo per lo swing up appena determinato non rispetta i limiti fisici imposti dalle rotaie, le quali sono di lunghezza finita. Il problema si risolve introducendo additivamente un termine penalizzante posizioni prossime ai fine corsa

$$u_{\text{lim}} := k_{\text{lim}} \text{sign}(r) \log(1 - |r|/R)$$

complessivamente, la legge di controllo per lo swing up assume quindi la seguente forma finale

$$u := u_{\text{SU}} + u_{c1} + u_{c2} + u_{\text{lim}}$$

numericamente, il guadagno  $k_{\text{lim}}$  è fissato sperimentalmente a 2 V.

# Analisi

## 3.1 Robustezza

Grazie alle funzioni messe a disposizione dal Control System Toolbox, la robustezza del sistema di controllo progettato può essere studiata molto agevolmente per via numerica in ambiente MATLAB®. Il diagramma di Nyquist del guadagno di anello del sistema di controllo può essere tracciato applicando il comando `nyquist` alla matrice di trasferimento  $L_{\text{fil}}(z)$ . Si ottiene la figura 3.1

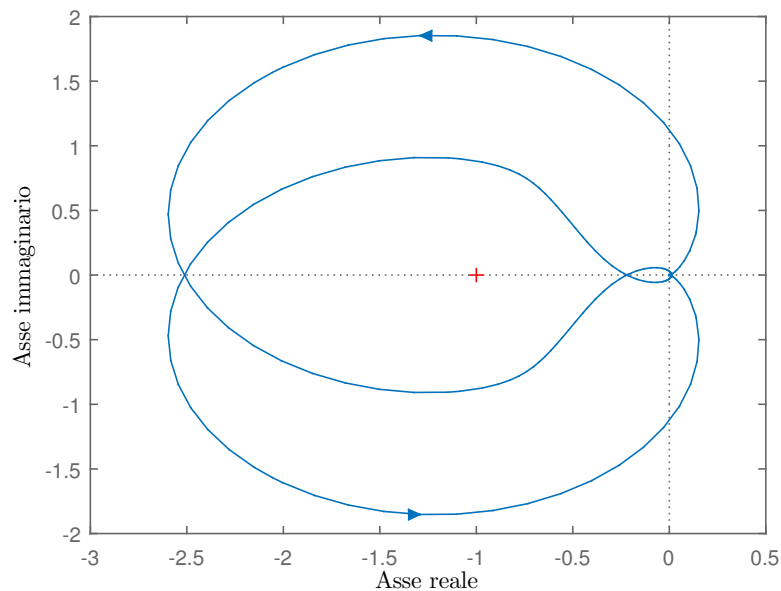


Figura 3.1: Diagramma di Nyquist del sistema di controllo

Come si può notare, la curva  $L_{\text{fil}}(\exp(j2\pi f)) : 0 \text{ Hz} \mapsto 100 \text{ Hz}$  circonda il punto critico  $-1$  in senso antiorario due volte. Considerando il fatto che la chiusura all'infinito (dovuta all'autovalore nell'origine del processo) avviene in senso orario, il numero di circuitazioni antiorarie intorno al punto critico si riduce a 1. La matrice di anello  $L_{\text{fil}}(z)$  presenta un solo polo a parte reale positiva (l'autovalore  $\lambda_2$  della matrice di stato  $A$ ), quindi si conclude che il sistema di controllo ad anello chiuso è internamente stabile.

Una ulteriore riprova della stabilità può essere effettuata studiando gli autovalori della matrice di stato dell'anello chiuso. Definendo lo stato del sistema come  $X_{\text{fil}} := [x^T \ w \ v \ v_{\text{in}} \ v_{\text{out}}^T]^T$

si perviene alla seguente matrice di stato

$$A_{\text{fil}} := \begin{bmatrix} \Phi + \Gamma_u F_x L_1 C & \Gamma_u F_w & \Gamma_u F_x L_2 & 0_{4 \times 1} & 0_{4 \times 3} \\ e_1^T C & 1 & 0 & 0 & 0_{1 \times 3} \\ MC & 0 & E & 0 & 0_{1 \times 3} \\ b_{\text{ind}} F_x L_1 C & b_{\text{ind}} F_w & b_{\text{ind}} F_x L_2 & a_{\text{ind}} & 0_{1 \times 3} \\ b_{\text{outd}} I_3 C & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} & a_{\text{outd}} I_3 \end{bmatrix}$$

dove  $(a_{\text{ind}}, b_{\text{ind}})$  e  $(a_{\text{outd}}, b_{\text{outd}})$  sono rispettivamente i campionamenti ZOH dei modelli di stato del filtro PB e dei filtri AA, i.e.

$$a_{id} := \exp(-a_i T) \quad b_{id} := \left[ \int_0^T \exp(-a_i \sigma) d\sigma \right] a_i \quad i = \text{in, out}$$

Applicando il comando `eig` alla matrice di stato  $A_{\text{fil}}$  si trovano i seguenti autovalori

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.2733 + 0.0000j & \lambda_2 &= 0.3210 + 0.0000j & \lambda_3 &= 0.3210 + 0.0000j & \lambda_4 &= 0.3210 + 0.0000j \\ \lambda_5 &= 0.8774 + 0.0475j & \lambda_6 &= 0.8774 - 0.0475j & \lambda_7 &= 0.9948 + 0.0000j & \lambda_8 &= 0.9967 + 0.0047j \\ \lambda_9 &= 0.9967 - 0.0047j & \lambda_{10} &= 0.9000 + 0.0000j \end{aligned}$$

essendo questi interni alla regione di stabilità TD il sistema di controllo è stabile, in accordo al diagramma di Nyquist del guadagno di anello.

Il controllo gode di buone proprietà di robustezza. I relativi margini di stabilità possono essere determinati applicando il comando `allmargin` al guadagno di anello  $L_{\text{fil}}(z)$ . Si trova un buon margine di fase di circa  $45^\circ$ , mentre per il guadagno il sistema di controllo tollera fluttuazioni comprese nell'intervallo  $(0.3977, 4.5288)$ .

È interessante confrontare le proprietà di stabilità dell'attuale sistema di controllo con quelle del sistema di controllo a regolazione dinamica, così da avere un'idea dell'impatto dei filtri PB e AA sulla robustezza dell'anello di controllo progettato nella fase iniziale di questo lavoro. In figura 3.2 vengono mostrati i diagrammi di Nyquist associato all'anello privo dei filtri e il diagramma di Nyquist associato all'anello che include i filtri

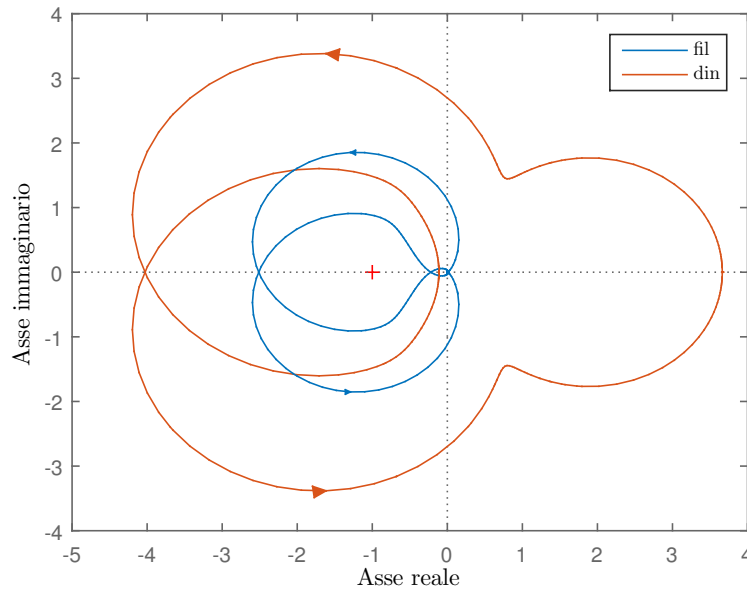


Figura 3.2: Confronto dei diagrammi di Nyquist dei guadagni di anello  $L_{\text{fil}}(z)$  e  $L_{\text{din}}(z) = L_{\text{st}}(z)$

La differenza sostanziale tra le due curve consiste nell'ampiezza dei lobi e quindi nei margini di stabilità. Sempre applicando il comando `allmargin`, questa volta al guadagno di anello  $K_{\text{din}}$  del sistema di controllo a regolazione dinamica, si trova un ottimo margine di fase di circa  $68^\circ$ , mentre per il guadagno l'intervallo di tolleranza è  $(0.2481, 8.9231)$ . L'inserimento dei filtri nell'anello di controllo dunque comporta un netto ridimensionamento in senso negativo dei margini di stabilità.

### 3.2 Sensitività ai disturbi

Le proprietà delle risposte ai disturbi  $\alpha$ ,  $\tau$  da parte dei sistemi di controllo possono essere analizzate per mezzo delle risposte in frequenza delle matrici di trasferimento dei disturbi considerati ( $\alpha$  o  $\tau$ ) verso lo stato del processo, cioè le sensitività  $T_{wx}^{\text{st}}, T_{wx}^{\text{din}}, T_{wx}^{\text{fil}}$  con  $w = \alpha, \tau$ . In questa sezione ci si occupa della determinazione di tali sensitività.

**Regolazione statica** : per quanto riguarda il sistema di controllo a regolazione statica si faccia riferimento alla figura 3.3

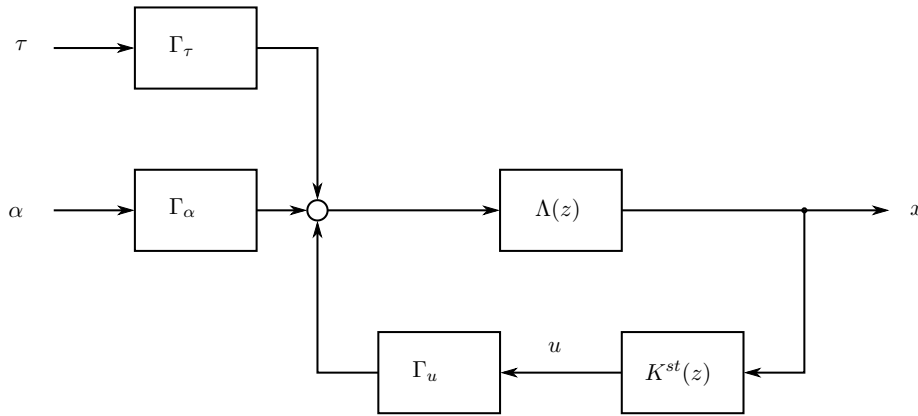


Figura 3.3: Schema equivalente del sistema di controllo a regolazione statica

La matrice di trasferimento che caratterizza il ramo diretto, ossia  $G_{\text{dir}}(z)$ , e la matrice che caratterizza il ramo di ritorno, ossia  $G_{\text{inv}}(z)$ , dell'anello sono rispettivamente date dalle seguenti espressioni

$$\begin{aligned} G_{\text{dir}}^{\text{st}}(z) &:= \Lambda(z) \\ G_{\text{inv}}^{\text{st}}(z) &:= \Gamma_u K^{\text{st}}(z) \end{aligned}$$

in virtù della regola di Mason, dunque, le sensitività dal disturbo  $\alpha$  e  $\tau$  sono rispettivamente

$$\begin{aligned} T_{\alpha x}^{\text{st}}(z) &= [I_4 - G_{\text{dir}}(z)G_{\text{inv}}(z)]^{-1} \Gamma_\alpha G_{\text{dir}}(z) = [I_4 - \Lambda(z)\Gamma_u K^{\text{st}}(z)]^{-1} \Lambda(z)\Gamma_\alpha \\ T_{\tau x}^{\text{st}}(z) &= [I_4 - G_{\text{dir}}(z)G_{\text{inv}}(z)]^{-1} \Gamma_\tau G_{\text{dir}}(z) = [I_4 - \Lambda(z)\Gamma_u K^{\text{st}}(z)]^{-1} \Lambda(z)\Gamma_\tau \end{aligned}$$



**Regolazione dinamica** : viceversa, per quanto riguarda il sistema di controllo a regolazione dinamica, si faccia riferimento alla figura 3.4

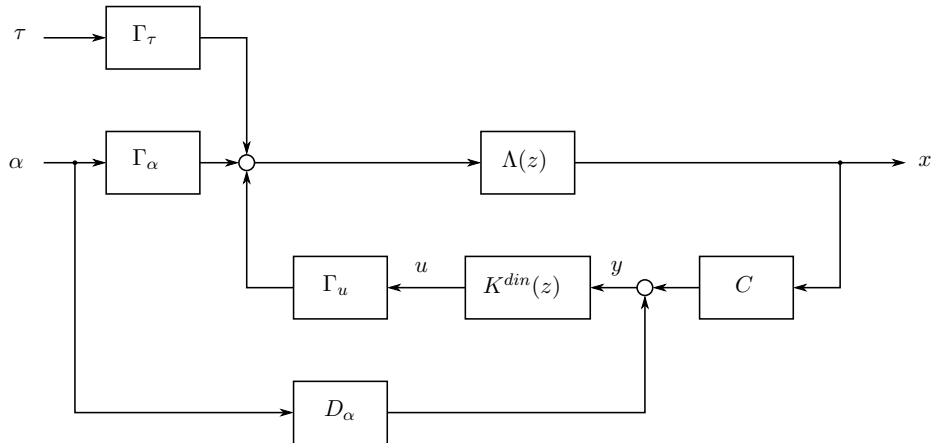


Figura 3.4: Schema equivalente del sistema di controllo a regolazione dinamica

In questo caso, a causa dell'effetto di  $\alpha$  sull'uscita  $y$ , non è possibile determinare in modo immediato la sensitività al disturbo  $\alpha$  applicando la regola di Mason. Per questo motivo si preferisce scrivere l'espressione dello stato  $x$  in funzione dei disturbi  $\alpha$  e  $\tau$ . Analizzando la struttura dello schema a blocchi in figura 3.4 si trova

$$x = [I_4 - \Lambda(z)\Gamma_u K^{\text{din}}(z)C]^{-1}\Lambda(z)[\Gamma_\alpha + \Lambda(z)\Gamma_u K^{\text{din}}(z)D_\alpha]\alpha + [I_4 - \Lambda(z)\Gamma_u K^{\text{din}}(z)C]^{-1}\Lambda(z)\Gamma_\tau\tau$$

quindi le sensitività cercate sono

$$T_{\alpha x}^{\text{din}}(z) = [I_4 - \Lambda(z)\Gamma_u K^{\text{din}}(z)C]^{-1}\Lambda(z)[\Gamma_\alpha + \Gamma_u K^{\text{din}}(z)D_\alpha]$$

$$T_{\tau x}^{\text{din}}(z) = [I_4 - \Lambda(z)\Gamma_u K^{\text{din}}(z)C]^{-1}\Lambda(z)\Gamma_\tau$$

**Regolazione dinamica con filtri** : una volta definita la matrice di trasferimento dallo stato esteso del processo  $x^e$  verso lo stato ridotto del processo  $x$ , cioè

$$C^x = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 1} & I_4 & 0_{4 \times 3} \end{bmatrix}$$

mediante la quale si estrae lo stato del processo ridotto  $x$  dallo stato del processo esteso  $x^e$ , si può sintetizzare l'anello di controllo come in figura 3.5

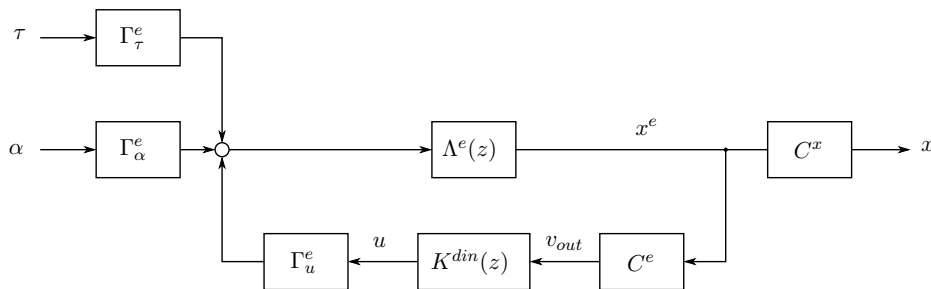


Figura 3.5: Schema equivalente del sistema di controllo a regolazione dinamica con filtri

Le sensitività si possono determinare agevolmente seguendo lo stesso procedimento seguito nel precedente caso di retroazione statica. La matrici di trasferimento che caratterizzano il ramo diretto e il ramo di ritorno dell'anello sono rispettivamente date dalle seguenti espressioni

$$\begin{aligned} G_{\text{dir}}^{\text{fil}}(z) &:= \Lambda^e(z) \\ G_{\text{inv}}^{\text{fil}}(z) &:= \Gamma_u^e K^{\text{din}}(z) C^e \end{aligned}$$

in virtù della regola di Mason, dunque, le sensitività dal disturbo  $\alpha$  e  $\tau$  sono rispettivamente

$$\begin{aligned} T_{\alpha x}^{\text{fil}}(z) &= C^x [I_8 - G_{\text{dir}}^{\text{fil}}(z) G_{\text{inv}}^{\text{fil}}(z)]^{-1} G_{\text{dir}}^{\text{fil}}(z) \Gamma_\alpha^e = C^x [I_8 - \Lambda^e(z) \Gamma_u^e K^{\text{din}}(z) C^e]^{-1} \Lambda^e(z) \Gamma_\alpha^e \\ T_{\tau x}^{\text{fil}}(z) &= C^x [I_8 - G_{\text{dir}}^{\text{fil}}(z) G_{\text{inv}}^{\text{fil}}(z)]^{-1} G_{\text{dir}}^{\text{fil}}(z) \Gamma_\tau^e = C^x [I_8 - \Lambda^e(z) \Gamma_u^e K^{\text{din}}(z) C^e]^{-1} \Lambda^e(z) \Gamma_\tau^e \end{aligned}$$

### 3.3 Reiezione dei disturbi

Le capacità di reiezione dei disturbi da parte dei sistemi di controllo sono caratterizzate dalle risposte in ampiezza delle relative sensitività, le quali possono essere tracciate in ambiente MATLAB<sup>®</sup> per mezzo della funzione `bodemag`. In effetti gli stati del processo controllato secondo la regolazione statica, dinamica o dinamica con filtri possono essere espressi nei seguenti termini

$$\begin{aligned} \text{regolazione lineare: } x &= T_{\alpha x}^{\text{st}}(z)\alpha + T_{\tau x}^{\text{st}}(z)\tau \\ \text{regolazione dinamica: } x &= T_{\alpha x}^{\text{din}}(z)\alpha + T_{\tau x}^{\text{din}}(z)\tau \\ \text{regolazione dinaminca con filtri: } x &= T_{\alpha x}^{\text{fil}}(z)\alpha + T_{\tau x}^{\text{fil}}(z)\tau \end{aligned}$$

è dunque chiaro che, una volta prestabilito l'andamento dei disturbi, i precedenti stati sono completamente individuati dalle sole sensitività. Tuttavia il calcolo delle risposte in frequenza delle sensitività non si rivela sufficientemente accurato, pertanto si preferisce seguire un'altra via, sperimentale, per caratterizzare le proprietà di reiezione dei disturbi di cui godono i sistemi di controllo progettati. Infatti, fissando le condizioni iniziali a zero, è sufficiente analizzare la risposta a regime dei sistemi di controllo quando sono simulati in ingresso dei segnali di disturbo sinusoidali di ampiezza e frequenza prefissate, fase arbitraria.

Nella presente trattazione si focalizza l'attenzione solamente sulle risposte riguardanti la posizione del carrello e l'angolo del pendolo. Nelle figure 3.6 e 3.7 sono riassunti i risultati delle simulazioni, effettuate supponendo di disturbi  $\alpha$  di ampiezza pari a 0.25 rad e disturbi  $\tau$  di ampiezza pari a 1 Nm. Viceversa, le frequenze testate sono  $\{0.5 \cdot 10^i, 10^i\}_{i=-2}^2$ . A seguire, le relative curve sono ottenute per interpolazione cubica dei 10 punti rilevati in simulazione.

Per quanto riguarda l'effetto del disturbo  $\alpha$ , la figura 3.6 mostra un netto peggioramento delle prestazioni nel passaggio dalla regolazione statica alla regolazione dinamica. Nonostante questo il sistema di controllo, salvo che in un intorno dei  $10^{-1}$  Hz per quanto riguarda la posizione del carrello e un intorno dei 10 Hz per quanto riguarda l'angolo del pendolo, presenta delle buone capacità di reiezione. Si noti l'effetto benefico dei filtri AA e PB: in alta frequenza, le capacità di reiezione del sistema di controllo a regolazione dinamica con filtri sono superiori rispetto quelle del sistema di controllo a regolazione dinamica senza filtri.

Per quanto riguarda l'effetto del disturbo  $\tau$ , la figura 3.7 non mostra significative variazioni di prestazioni nel passaggio da uno schema di controllo ad un altro. Escludendo l'intorno dei  $10^{-1}$  Hz, le capacità di reiezione di tale disturbo possono ritenersi più che soddisfacenti.

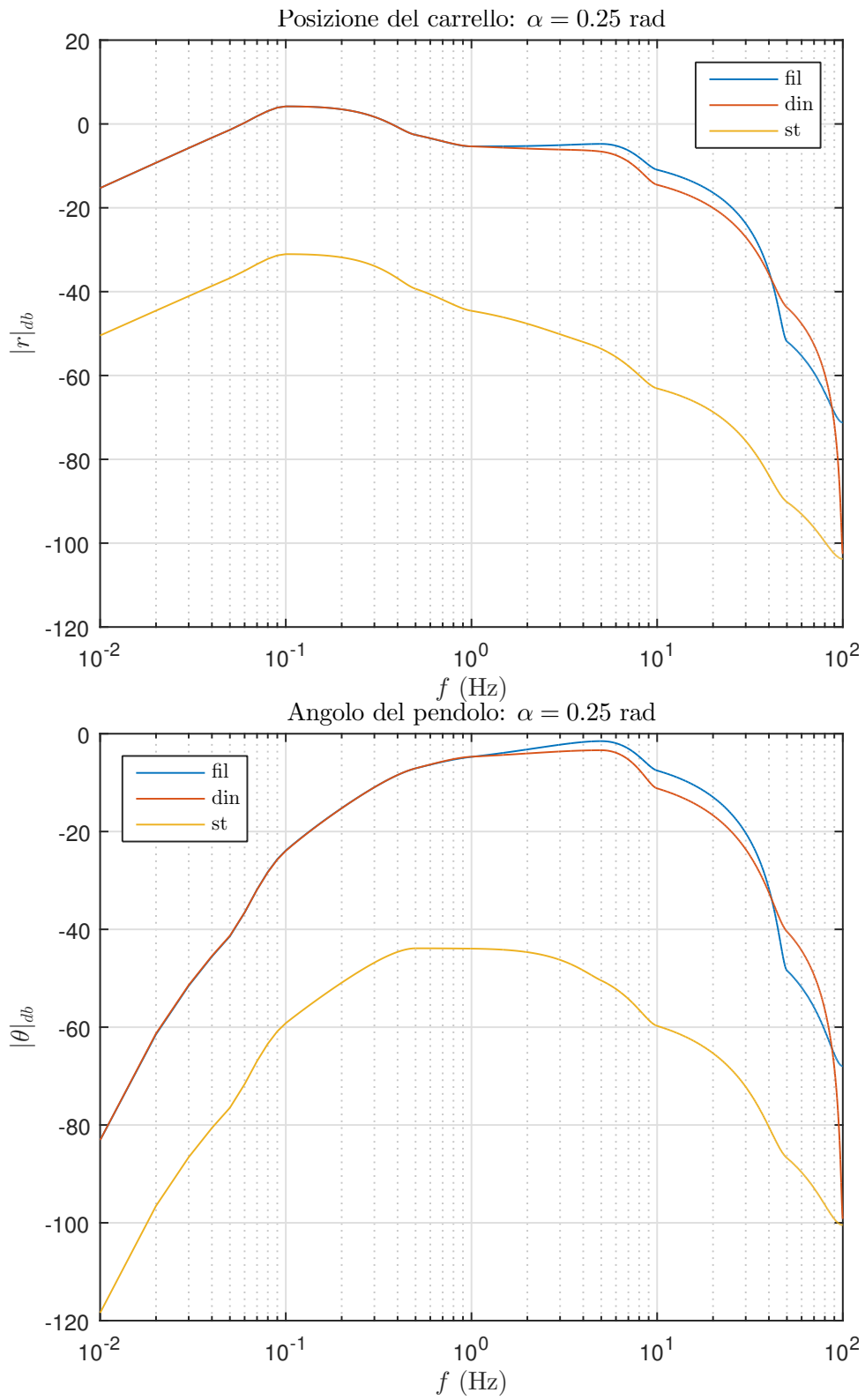


Figura 3.6: Effetto dell'inclinazione delle rotaie

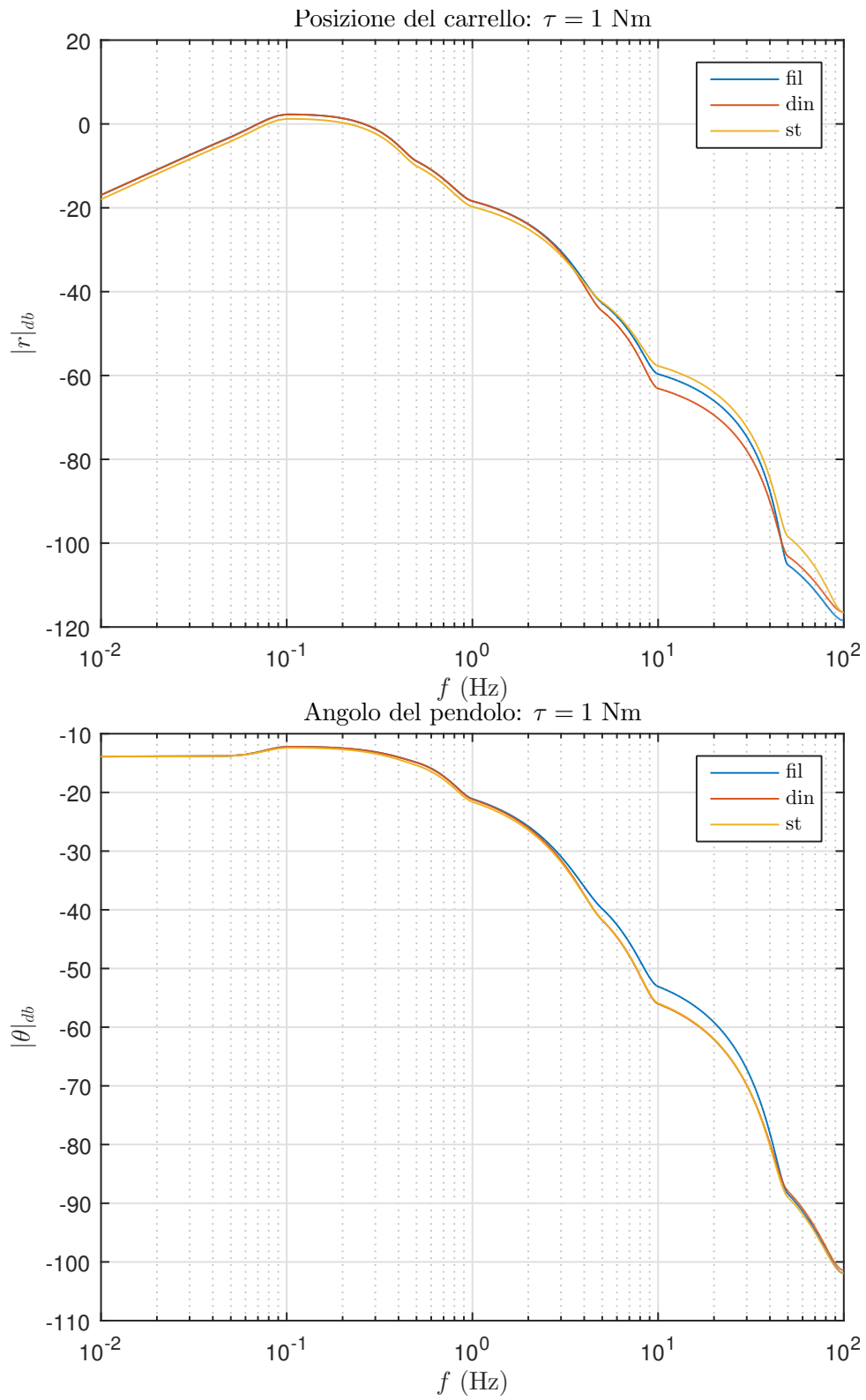


Figura 3.7: Effetto del disturbo di coppia

### 3.4 Attrito di Coulomb

In questa sezione ci si limita a discutere i risultati delle simulazioni del sistema di controllo progettato, rimandando all'appendice la definizione del modello Simulink® del sistema di controllo a regolazione dinamica con compensazione NL dell'attrito Coulombiano.

Tanto per fissare le idee, sono stati scelti i seguenti parametri di simulazione:

- $F_s = 5$  N per il coefficiente di attrito Coulombiano;
- $[0, 30]$  s per l'orizzonte temporale di simulazione;
- $x(0) = [0.17 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  per la condizione iniziale del processo;
- $r_{sp} = 0$  per il setpoint da inseguire.

La risposta del sistema di controllo privo del compensatore NL è mostrata in figura 3.8

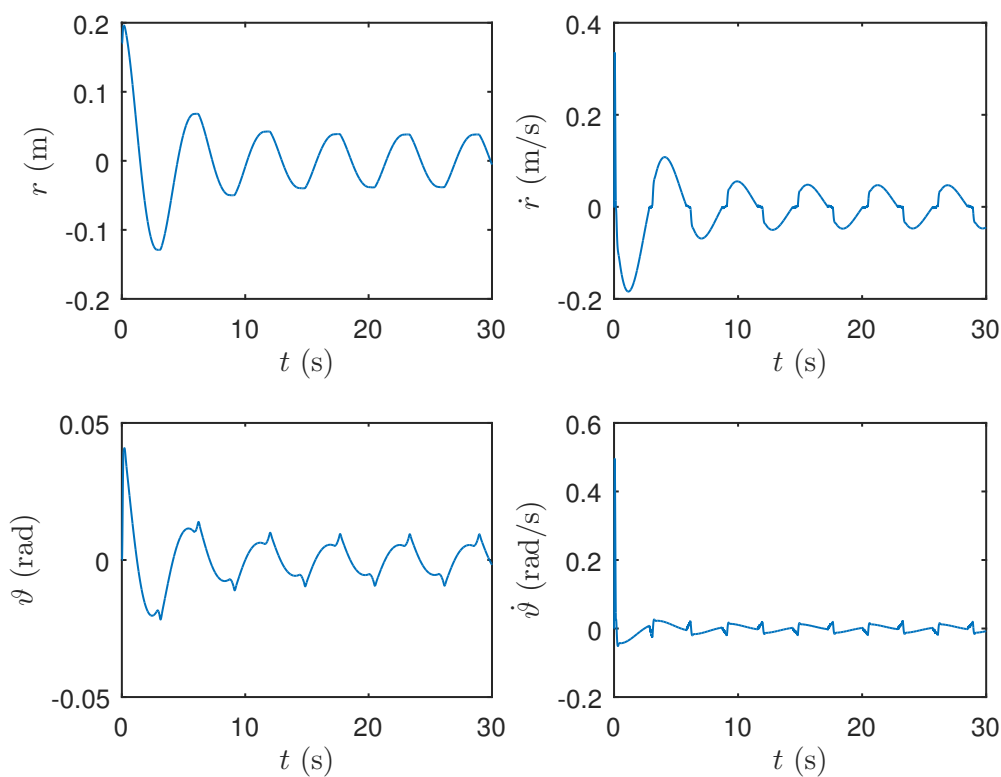


Figura 3.8: Risposta del sistema di controllo privo del compensatore NL ( $\Psi = 0$ )

Si notino la sottoelongazione e le oscillazioni nella risposta in posizione del carrello: il fatto che la variabile  $r$  assuma valori negativi va contro i limiti fisici delle rotaie, pertanto non è possibile trasferire lo stato del processo nell'origine a partire dalla posizione iniziale  $r_0$ . A causa del vincolo  $r \geq 0$ , in generale lo spazio degli stati raggiungibili è sia funzione della posizione iniziale  $r_0$  del carrello, per la presenza di una sottoelongazione nella risposta, sia della posizione finale  $r_{sp}$  del carrello, per la presenza di oscillazioni nella risposta.

L'ampiezza della sottoelongazione può essere ridotta agendo sulla definizione delle matrici di costo  $Q, R$ , mentre l'ampiezza delle oscillazioni può essere ridotta introducendo nell'anello di controllo il compensatore NL. In generale, al crescere del guadagno  $\Psi$  del compensatore NL si ha una riduzione dell'ampiezza delle oscillazioni ma un incremento delle ampiezze degli spike di velocità che caratterizzano la precedente la risposta. Questo fatto è mostrato chiaramente nelle seguenti figure 3.9 e 3.10

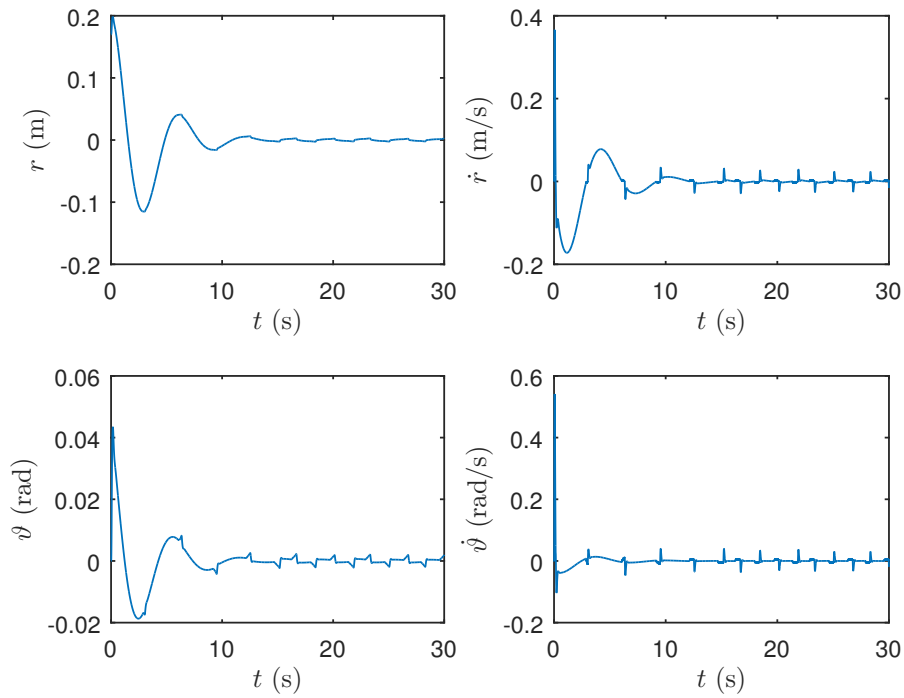


Figura 3.9: Risposta del sistema di controllo completo del compensatore NL ( $\Psi = F_s/a$ )

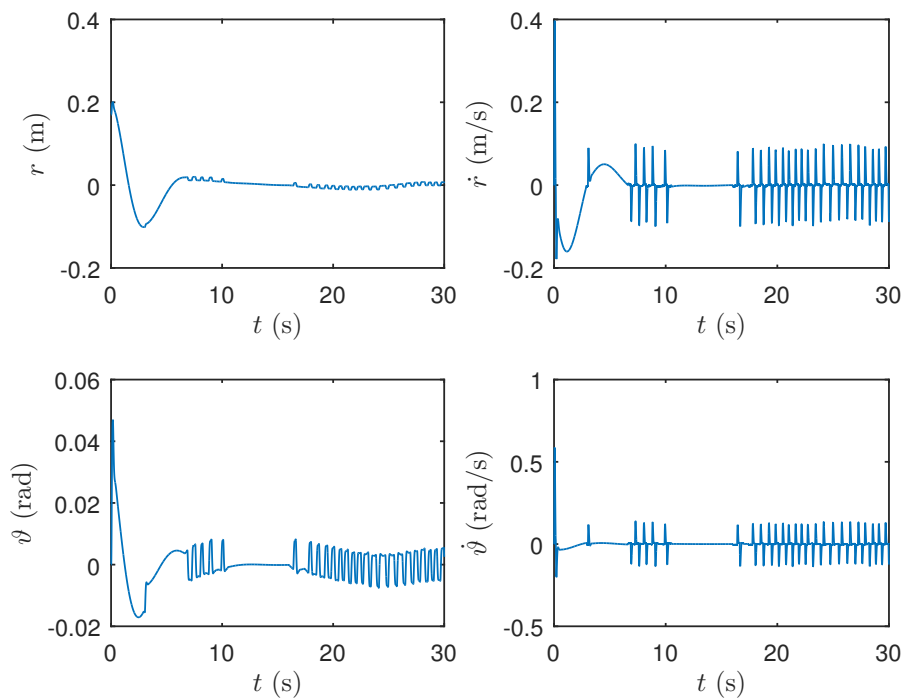


Figura 3.10: Risposta del sistema di controllo completo del compensatore NL ( $\Psi = 2F_s/a$ )

Sebbene dal punto di vista teorico il sistema di controllo preservi la stabilità anche per valori elevati del guadagno  $\Psi$ , una scelta eccessiva per tale guadagno è sconsigliata in quanto questa, a causa degli spike, sottopone il processo ad elevate accelerazioni che possono compromettere l'integrità del sistema di controllo. Il valore ottimo, compromesso tra reiezione delle oscillazioni e ampiezza degli spike, è, in base alle considerazioni fatte durante lo studio della forma discretizzata del processo,  $\Psi = F_s/a$ .

### 3.5 Prestazioni e consumi

Si analizzano adesso gli effetti dei pesi sull'errore di posizione  $Q_{55}$  e  $Q_{11}$  sulla risposta e sull'ingresso del sistema di controllo completo del compensatore NL.

**Effetto di  $Q_{55}$**  al crescere del parametro  $Q_{55}$ , che pesa l'integrale dell'errore di posizione, la risposta in posizione migliora in prontezza ma presenta sottoelongazioni e sovraelongazioni più accentuate, portando il sistema di controllo verso l'instabilità. Lo stesso discorso vale per le risposte in velocità, pertanto al crescere del peso si sottopone il processo a maggiori sforzi meccanici.

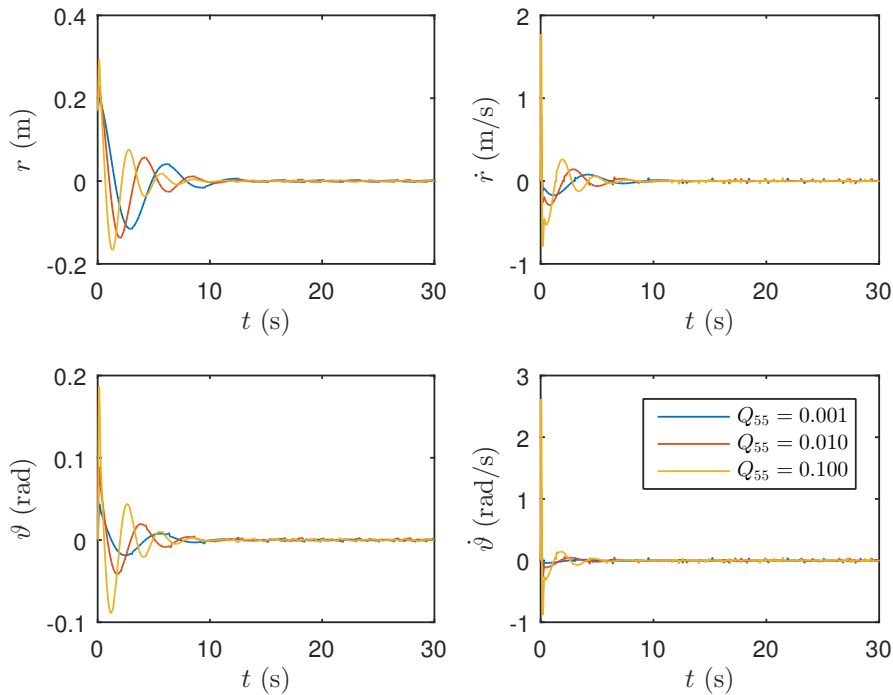


Figura 3.11: Risposta del sistema di controllo al variare di  $Q_{55}$

Per quanto riguarda il segnale di ingresso, al crescere del parametro il segnale di ingresso tende a crescere molto velocemente in valore assoluto, quindi la situazione peggiora<sup>1</sup> dal punto di vista dei consumi.

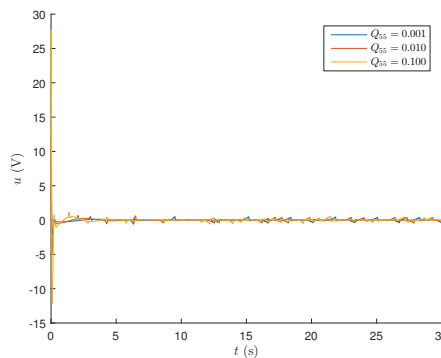


Figura 3.12: Ingresso al sistema di controllo al variare di  $Q_{55}$

<sup>1</sup>La differenza sostanziale tra le 3 curve sta nell'impulso iniziale: in figura 3.12 gli impulsi degli ingressi per  $Q_{55} = 0.01, 0.1$  sono sovrascritti (quindi non visibili con chiarezza) da quello dell'ingresso per  $Q_{55} = 0.1$

**Effetto di  $Q_{11}$**  variando il parametro  $Q_{11}$ , che pesa l'errore di posizione  $r$  del carrello, si ottengono le seguenti risposte da parte del sistema di controllo. Dal punto di vista della risposta in posizione, un peso  $Q_{11}$  maggiore comporta un miglioramento sia in termini di sottoelongazione che in termini di prontezza della risposta in posizione. Come nel caso precedente, pur sempre in misura minore, l'aumento del peso comporta maggiori velocità da parte del processo.

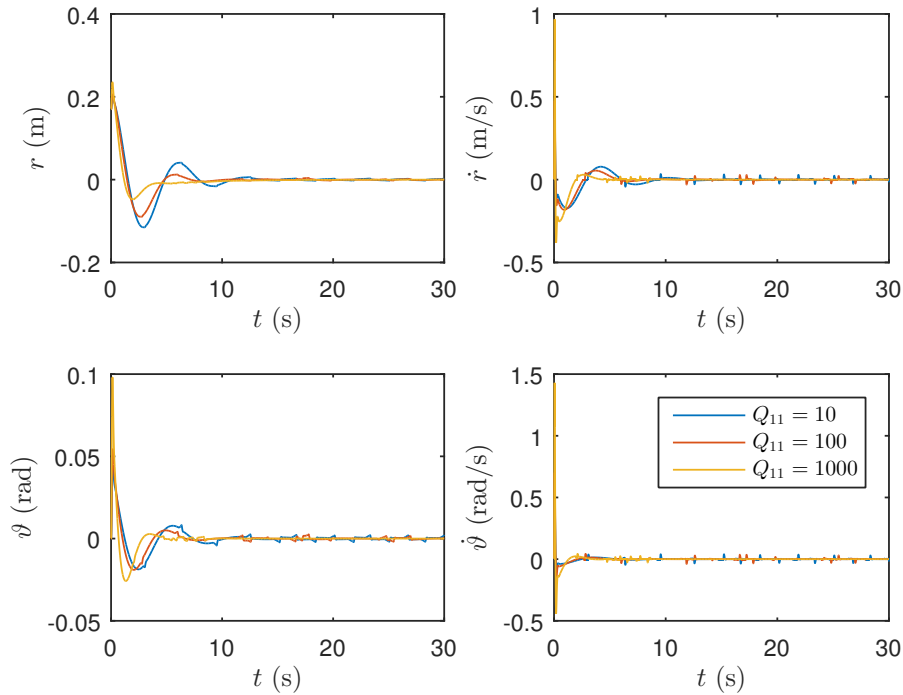


Figura 3.13: Risposta del sistema di controllo al variare di  $Q_{11}$

Dal lato dell'ingresso, al crescere del peso si ha un peggioramento<sup>2</sup>, pur sempre in misura minore rispetto al caso precedente, in termini di consumi di potenza.

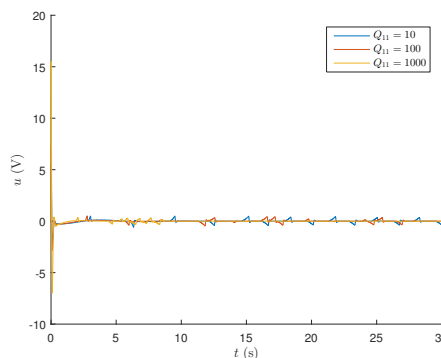


Figura 3.14: Risposta del sistema di controllo al variare di  $Q_{11}$

In conclusione, le precedenti simulazioni mostrano come la scelta  $Q_{55} = 0.01$ ,  $Q_{11}$  rappresentino un compromesso tra stabilità/consumi ridotti di potenza e prontezza del sistema di controllo.

<sup>2</sup>Valgono considerazioni analoghe a quelle riguardo la figura 3.12



### 3.6 Stress Test

Il sistema di controllo è progettato partendo dal presupposto, quantitativamente non chiaro a priori, che il processo si trovi in prossimità dell'equilibrio. È interessante determinare entro quali limiti devono rientrare l'angolo iniziale del pendolo, l'inclinazione delle rotaie e l'intensità dell'impulso di coppia affinché la precedente condizione sia ben determinata. Arrestando l'indagine alla relativa cifra decimale indicata nei risultati, dopo svariate simulazioni di prova si trovano i seguenti valori massimi

$$\alpha_{\max} = 0.33 \text{ rad} \quad \tau_{\max} = 6.3 \text{ Nm} \quad \theta_{\max}(0) = 0.33 \text{ rad}$$

questi valori si riferiscono a test individuali sul parametro in questione:  $\alpha_{\max}$  e  $\tau_{\max}$  sono stati determinati a partire dall'equilibrio  $x(0) = 0_{4 \times 1}$  e nell'ipotesi un disturbo escluda l'altro, mentre  $\theta_{\max}(0)$  è stato determinato a partire dalla condizione iniziale  $x(0) = [0 \ \theta_{\max}(0) \ 0 \ 0]^T$  e nell'ipotesi  $\alpha = \tau = 0$ . Naturalmente combinando gli effetti, i precedenti valori si riducono notevolmente.

### 3.7 Confronto delle risposte dei sistemi di controllo

Come passo finale si riportano a confronto le risposte del sistema di controllo a regolazione statica, del sistema di controllo a regolazione dinamica e del sistema di controllo a regolazione dinamica con filtri. In ogni sistema di controllo è presente il compensatore dell'attrito Coulombiano.

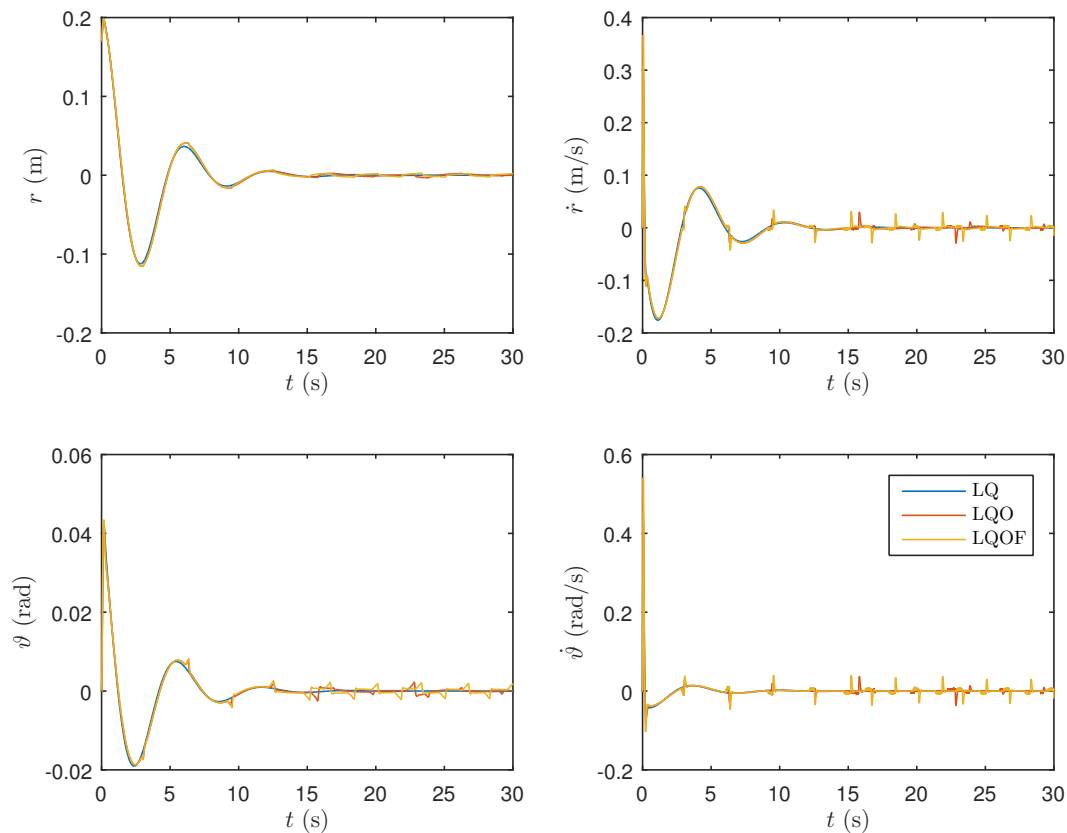


Figura 3.15: Confronto tra le risposte dei sistemi di controllo. In blu la risposta del sistema di controllo a regolazione statica, in rosso la risposta del sistema di controllo a regolazione dinamica, in ocra la risposta del sistema di controllo a regolazione dinamica con filtri

Il fatto che le risposte siano tra loro indistinguibili (trascurando gli spike agli attraversamenti del setpoint) dimostra la bontà del progetto: l'osservatore fornisce una eccellente stima della velocità angolare del pendolo mentre i filtri PB e AA non alterano significativamente la dinamica della risposta. Di fatto, il sistema di controllo a regolazione dinamica con filtri recupera in gran parte le prestazioni del sistema di controllo di principio, ossia quello, purtroppo irrealizzabile, a regolazione statica.

### 3.8 Simulazione dimostrativa

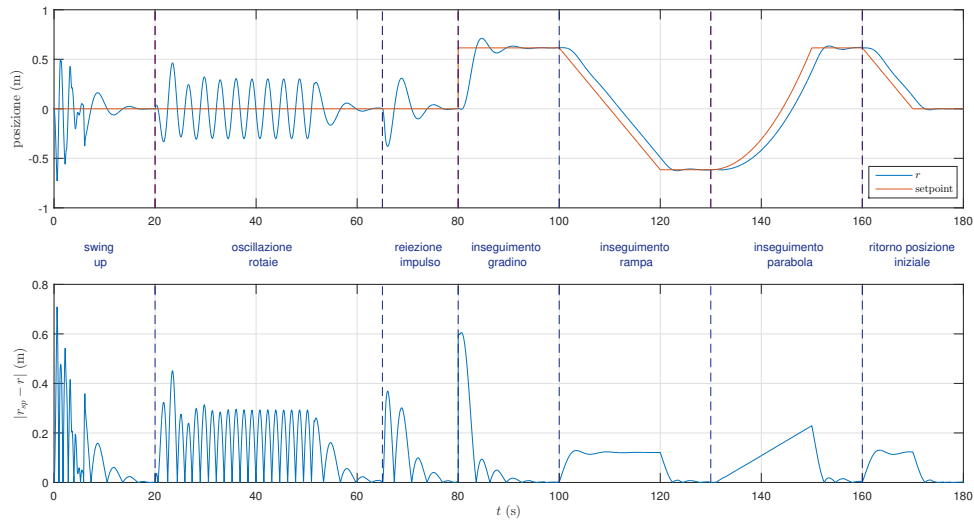


Figura 3.16: Simulazione dimostrativa

Inizialmente il controllore si occupa dello swing up del pendolo, per poi occuparsi della stabilizzazione nell'intorno dell'equilibrio instabile. In questa seconda fase vengono mostrate le prestazioni dello stabilizzatore, prima applicando in ingresso al processo alcuni disturbi, poi definendo un setpoint polinomiale da inseguire.

Le espressioni analitiche dei disturbi applicati nella prima fase della simulazione sono le seguenti

$$\text{oscillazione rotaie: } \alpha = 0.075 \sin(2t)[1(t - 20) - 1(t - 20 + 10\pi)] \text{ rad}$$

$$\text{impulso di coppia: } \tau = [1(t - 65) - 1(t - 65.5)] \text{ Nm} \approx \delta(t - 65) \text{ Nm}$$

viceversa, l'espressione analitica del setpoint è la seguente

$$\begin{aligned} r_{\text{sp}} = & 0.6 \, 1(t - 80) && \text{(gradino)} \\ & - 0.06t[1(t - 100) - 1(t - 120)] && \text{(rampa)} \\ & + 0.003t^2[1(t - 130) - 1(t - 150)] + 1.2 \, 1(t - 150) && \text{(parabola)} \\ & - 0.06t[1(t - 160) - 1(t - 170)] && \text{(rientro posizione iniziale)} \end{aligned}$$

La simulazione mostra l'effetto del modello interno, ossia dell'integratore, riguardo l'errore di inseguimento del setpoint. In accordo al PdMI, si nota che per  $t \rightarrow \infty$  l'errore al gradino si annulla, l'errore alla rampa si mantiene limitato e l'errore alla parabola tende a crescere indefinitamente.

# Conclusioni

Nel presente lavoro è stato progettato e simulato con successo un sistema di controllo per il bilanciamento del classico modello del pendolo inverso. In particolare, nel progetto sono state affrontate le seguenti problematiche

- reiezione di disturbi agenti sia in ingresso che in uscita al processo (attriti viscosi e inclinazione delle rotaie);
- controllo robusto del processo, per mezzo di una regolazione di tipo LQ;
- stima di parte dello stato del processo in modo “robusto”, ossia tramite un osservatore preservante i margini di stabilità garantiti dal solo controllo LQ;
- swing up del pendolo, per mezzo di un controllo dell’energia del processo, tenendo conto della lunghezza finita delle rotaie.

Un ulteriore sviluppo del presente lavoro è suggerito dal fatto che non si è riusciti a determinare uno schema di compensazione totale dell’attrito Coulombiano.

# Simulazione in ambiente Simulink<sup>®</sup>

Script MATLAB<sup>®</sup> per il caricamento dei parametri ed il lancio della simulazione

```
1 %%  
2 %-----  
3 % 0 Parametri  
4 %-----  
5  
6 % Processo  
7 Mc = 2.3900;           % massa carrello           [kg]  
8 mp = 0.9400;           % massa disco             [kg]  
9 Jp = 0.0727;           % inerzia asta            [kg*m^2]  
10 l = 0.5358;            % lunghezza asta          [m]  
11 g = 9.8100;            % gravita'                 [m*s^(-2)]  
12 a = 9.7220;            % guadagno motore        [V*N^(-1)]  
13 b = 13.6111;           % attrito carrello        [kg*s^(-1)]  
14 c = 0.0000;            % attrito pendolo         [kg*m*s^(-1)]  
15 Fs = 5.0000;           % attrito Coulomb         [N]  
16 R = 0.75;              % semilunghezza rotaie   [m]  
17  
18 % Disturbi  
19 alpha = 0.075;         % inclinazione rotaie  
20 intimp = 1;            % ampiezza impulso di coppia  
21 timp = 65;              % istante di applicazione impulso di coppia  
22 dimp = 0.5;            % durata impulso di coppia  
23  
24 % Campionamento  
25 t = 0.005;              % tempo di campionamento  
26  
27 % Condizioni iniziali  
28 theta0 = pi;           % angolazione iniziale pendolo  
29 r0 = 0.00;              % posizione iniziale carrello  
30  
31 % Setpoint  
32 rsp = 0;                % posizione finale carrello  
33  
34 %-----  
35 % 1 Definizione dei processi  
36 %-----
```

```

37
38 % Processo TC
39 J=Jp+mp*l^2;
40 Mtot=Mc+mp;
41 detMat=Mtot*J-(mp*l)^2;
42
43 A=(detMat)^(-1)*[zeros(2,2) detMat*eye(2);0 (mp*l)^2*g -J*b -mp*l*c;0 Mtot*mp*l
    *g -mp*l*b -Mtot*c];
44 Bu=(detMat)^(-1)*[zeros(2,1);J;mp*l]*a;
45 Balpha=-Mtot*g/(a)*Bu;
46 Btau=(detMat)^(-1)*[zeros(2,1);mp*l;Mtot];
47 BFs=-(a)^(-1)*Bu;
48 C=[eye(3) zeros(3,1)];
49 Dalpha=-[0 1 0]';
50 D=0;
51
52 sys=ss(A,Bu,C,D);
53 sysalpha=ss(A,Balpha,C,Dalpha);
54 systau=ss(A,Btau,C,D);
55 sysFs=ss(A,BFs,C,D);
56
57 % Processo TD
58 sysd=c2d(sys,t);
59 sysdalpha=c2d(sysalpha,t);
60 sysdtau=c2d(systau,t);
61 sysdFs=c2d(sysFs,t);
62
63 [~,Gamma_u,~,~]=ssdata(sysd);
64 [~,Gamma_alpha,~,~]=ssdata(sysdalpha);
65 [~,Gamma_tau,~,~]=ssdata(sysdtau);
66 [Phi,Gamma_Fs,C,D]=ssdata(sysdFs);
67
68 % Processo esteso TC
69 ain=259.4707;
70 aout=227.2727;
71
72 Ae=[-ain zeros(1,7);Bu A zeros(4,3);zeros(3,1) aout*eye(3)*C -aout*eye(3)];
73 Bue=[ain;zeros(7,1)];
74 Balphae=[0;Balpha;aout*Dalpha];
75 Btaue=[0;Btau;zeros(3,1)];
76 BFse=[0;BFs;zeros(3,1)];
77 Ce=[zeros(3,1) zeros(3,4) eye(3)];
78
79 Cx=[zeros(4,1) eye(4) zeros(4,3)];
80
81 sys_e=ss(Ae,Bue,Ce,zeros(3,1));
82 sysalpha_e=ss(Ae,Balphae,Ce,zeros(3,1));
83 systau_e=ss(Ae,Btaue,Ce,zeros(3,1));
84 sysFs_e=ss(Ae,BFse,Ce,zeros(3,1));
85
86 % Processo esteso TD

```

```

87 sysd_e=c2d(sys_e,t);
88 sysdalpha_e=c2d(sysalpha_e,t);
89 sysdtau_e=c2d(systau_e,t);
90 sysdFs_e=c2d(sysFs_e,t);
91
92 [~,Gamma_ue,~,~]=ssdata(sysd_e);
93 [~,Gamma_alphae,~,~]=ssdata(sysdalpha_e);
94 [~,Gamma_tae,~,~]=ssdata(sysdtau_e);
95 [Phie,Gamma_Fse,Ce,De]=ssdata(sysdFs_e);
96
97 %-----
98 % 2 Dimensionamento stabilizzatore, swing up, osservatore non lineare
99 %-----
100
101 % Processo aumentato
102 Phi_a=[Phi [0 0 0 0]';[1 0 0 0] 1];
103 Gamma_ua=[Gamma_u; 0];
104
105 % Regolatore LQ
106 Q=diag([10 2000 2 2.5 0.001]);
107 R=0.1;
108 [F,~,e]=dlqr(Phi_a,Gamma_ua,Q,R);
109 Fx=F(1:4);
110 Fw=F(5);
111
112 % Osservatore robusto
113 E=0.9;
114 H=0;
115 [T,M,L1,L2]=robs(Phi,Gamma_u,E,H);
116
117 % Compensatore non lineare
118 Psi=Fs/a;
119
120 % Osservatore non lineare
121 ktau=1000;
122
123 % Swingup
124 ksu=0.7;
125 beta=0.4;
126 klim=2;
127 %%

```

Per la definizione della function *robs* si faccia riferimento al paragrafo 2.8.

## Modello Simulink® del sistema di controllo

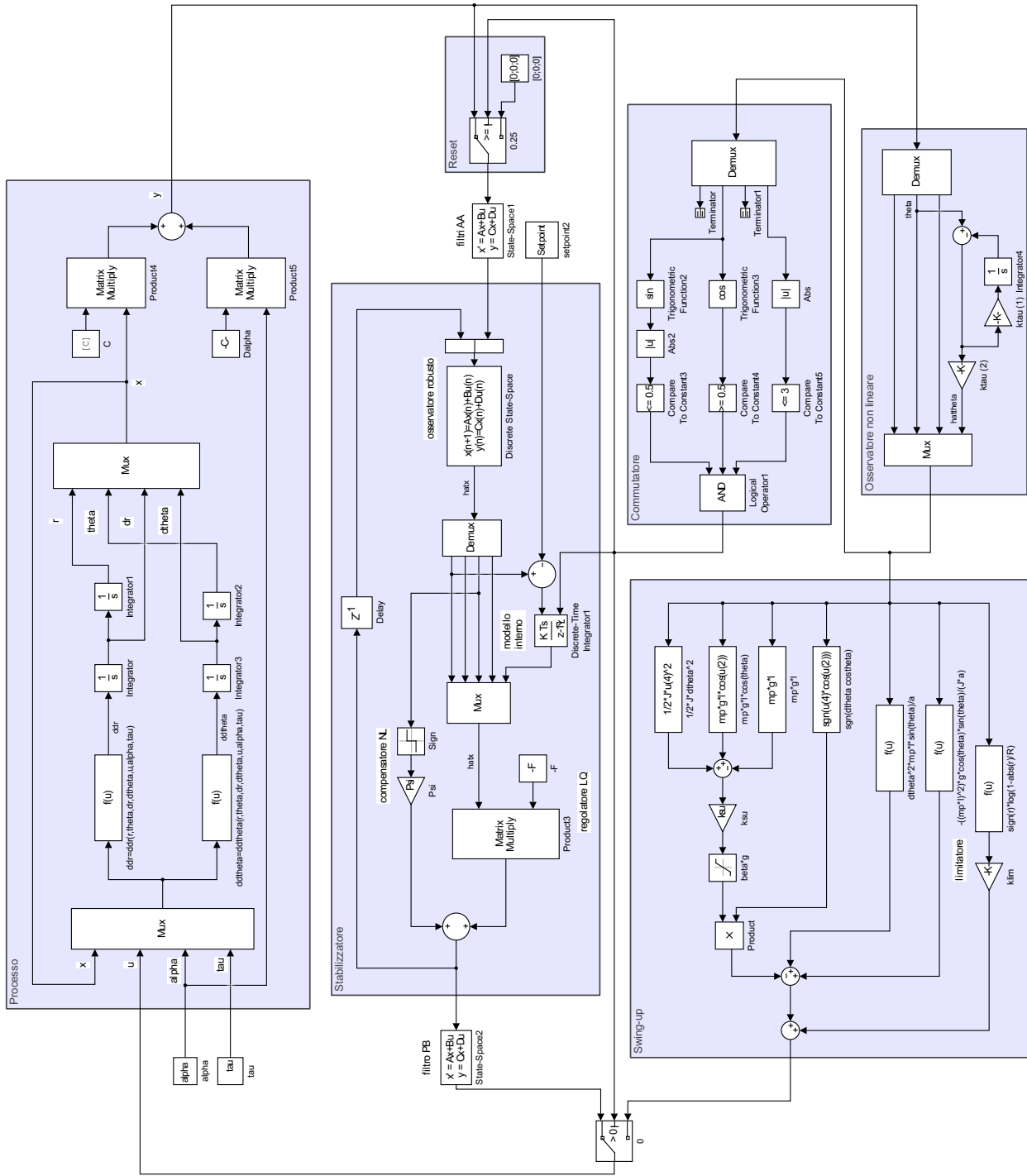
Nella pagina seguente si trova il modello *LQO\_filtri\_NL.slx* del sistema di controllo a regolazione dinamica con filtri e compensazione NL. Per la piena compatibilità con il precedente script, è necessario definire alcuni campi di alcuni blocchi che figurano nello schema.

- il campo *Expression* del blocco Fcn *ddr=ddr(r,theta,dr,dtheta,u,alpha,tau)* deve contenere la stringa  

$$\frac{(J*(a*u(5)-mp*1*\sin(u(2)-u(6))*u(4)^2-M*g*\sin(u(6))-b*u(3)-Fs*sgn(u(3)))+mp*1*\cos(u(2)-u(6))*(u(7)+mp*g*1*\sin(u(2))-c*u(4)))/(M*J+(mp*1*\cos(u(2)-u(6)))^2)}$$
- il campo *Expression* del blocco Fcn *ddtheta=ddtheta(r,theta,dr,dtheta,u,alpha,tau)* deve contenere la stringa  

$$\frac{(mp*1*\cos(u(2)-u(6))*(a*u(5)-mp*1*\sin(u(2)-u(6))*u(4)^2-M*g*\sin(u(6))-b*u(3)-Fs*sgn(u(3)))+M*(u(7)+mp*g*1*\sin(u(2))-c*u(4)))/(M*J+(mp*1*\cos(u(2)-u(6)))^2)}$$
- il campo *Expression* del blocco Fcn *cNL* deve contenere la stringa  $\Psi*sgn(u(1))$ ;
- il campo *Initial condition* del primo integratore deve contenere la stringa `r0`;
- il campo *Initial condition* del secondo integratore deve contenere la stringa `theta0`;
- il blocco *Step* deve contenere rispettivamente le stringhe `timp` e `intimp` ai campi *Step time* e *Final value*;
- il blocco *Step1* deve contenere rispettivamente le stringhe `timp+dimp` e `intimp` ai campi *Step time* e *Final value*;
- il campo *Constant value* del blocco *alpha* deve contenere la stringa `alpha`;
- il campo *Constant value* del blocco *Constant1* deve contenere la stringa `[C zeros(3)]`;
- il campo *Constant value* del blocco *Constant2* deve contenere la stringa `-F`;
- il campo *Constant value* del blocco *Constant3* deve contenere la stringa `Dalpha`;
- il campo *Constant value* del blocco *Constant4* deve contenere la stringa `rsp`;
- i campi *A,B,C,D* del blocco *State-Space* devono rispettivamente contenere le stringhe `-ain, ain, 1, 0`;
- i campi *A,B,C,D* del blocco *State-Space1* devono rispettivamente contenere le stringhe `-aout*eye(3), aout*eye(3), eye(3), zeros(3)`;
- i campi *A,B,C,D,Sample time* del blocco *Discrete State-Space1* devono rispettivamente contenere le stringhe `E, [MM H], L2, [L1 zeros(4,1)], t`;
- i campi *Gain value,Sample time* del blocco *Discrete-Time Integrator* devono rispettivamente contenere le stringhe `1/t, t`.

Lo schema ha valenza generale in quanto, una volta disattivato ramo relativo allo swing up, lo si può ricondurre in modo immediato agli altri schemi di controllo trattati nel presente lavoro: il modello del sistema di controllo a regolazione dinamica con filtri ma senza il compensatore NL si ottiene ponendo  $\Psi = 0$ ; il modello del sistema di controllo a regolazione dinamica si ottiene cortocircuitando le uscite dei filtri PB e AA ai relativi ingressi; il modello del sistema di controllo a regolazione statica si ottiene collegando l'ingresso del Demux, invece che all'uscita dell'osservatore, alle prime quattro uscite del Mux a 7 ingressi.





# Bibliografia

- [1] G.A.Medrano-Cerda (1999) Robust Computer Control of an Inverted Pendulum *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 19, no. 3, pp. 58 - 67.
- [2] K. J. Åström, K. Furuta (1996) Swinging up a pendulum by energy control *IFAC 13th World Congress*.
- [3] D. Chatterjee, A. Patra, H. K. Joglekar (2002) Swing-up and stabilization of a cart-pendulum system under restricted cart track length *Systems & Control Letters*, no. 47, pp. 355 – 364.