Tracciamento di oggetti estesi multipli

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Elettrica e dell'Automazione

Candidato
Matteo Tesori

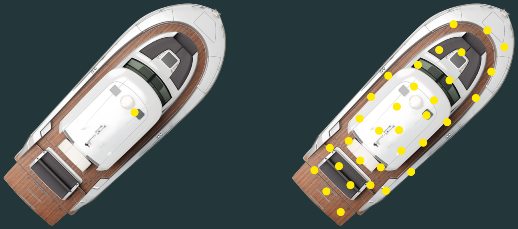
Relatori
Prof. Luigi Chisci
Prof. Giorgio Battistelli
Dott. Lin Gao

Università degli Studi di Firenze
16 Luglio 2021

Tracciamento di oggetti estesi multipli: determinare posizione e forma di molti oggetti estesi

- **Problema 1**: tracciare un singolo oggetto esteso
- **Problema 2**: tracciare più oggetti estesi simultaneamente

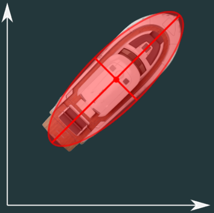
Tracciamento di un singolo oggetto esteso



Oggetto puntiforme: generica entità fisica in grado di generare non più di una singola misura.

Oggetto esteso: generica entità fisica in grado di generare contemporaneamente più misure.

Modello di un oggetto esteso



Posizione: vettore aleatorio $\boldsymbol{m}$ contenente le coordinate Cartesiane ξ, η del centro geometrico dell'oggetto.

$$\boldsymbol{m} \triangleq \begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix}'$$

Forma: ellisse aleatoria parametrizzata da tre variabili aleatorie - angolo di orientazione $\boldsymbol{\theta}$, lunghezza $\boldsymbol{l}_1$, larghezza $\boldsymbol{l}_2$ dell'oggetto. Tale ellisse è rappresentata dalla matrice aleatoria definita positiva $\boldsymbol{X} \propto \boldsymbol{S}\boldsymbol{S}'$, dove

$$\boldsymbol{S} \triangleq \begin{bmatrix} \cos\boldsymbol{\theta} & -\sin\boldsymbol{\theta} \\ \sin\boldsymbol{\theta} & \cos\boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{l}_1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{l}_2 \end{bmatrix}$$

Modello di moto (parte 1)

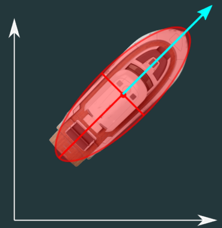
Idea: l'oggetto, pilotato da $\boldsymbol{s}$ (velocità longitudinale) e $\boldsymbol{\omega}$ (velocità angolare), segue la dinamica del modello *ad uniciclo*. Inoltre, lunghezza e larghezza $\boldsymbol{l} \triangleq [l_1 \ l_2]'$ sono costanti nel tempo

- **Posizione**

$$\boldsymbol{m}_{k+1} = \boldsymbol{m}_k + T\boldsymbol{s}_k \begin{bmatrix} \cos\boldsymbol{\theta}_k \\ \sin\boldsymbol{\theta}_k \end{bmatrix} + \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{m},k}$$

- **Forma**

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k + T\boldsymbol{\omega}_k + \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\theta},k}$$
$$\boldsymbol{l}_{k+1} = \boldsymbol{l}_k + \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{l},k}$$



Assunzione di base: il vettore velocità è allineato all'asse longitudinale dell'oggetto.

$$\vec{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{s} \begin{bmatrix} \cos\boldsymbol{\theta} \\ \sin\boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}$$

Osservazione: l'equazione di posizione e l'equazione di orientazione sono modelli a velocità costante

$$\vec{\boldsymbol{m}}_{k+1} = \vec{\boldsymbol{m}}_k + T\vec{\boldsymbol{s}}_k + \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{m},k}$$

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k + T\boldsymbol{\omega}_k + \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\theta},k}$$

dove il vettore di posizione $\vec{\boldsymbol{m}}$ è espresso in coordinate Cartesiane mentre il vettore di velocità $\vec{\boldsymbol{s}}$ è espresso in coordinate polari (modulo $\boldsymbol{s}$ e fase $\boldsymbol{\theta}$).

Idea: considerare un modello a derivata N-esima costante

$$\vec{\boldsymbol{m}}_{k+1} = \vec{\boldsymbol{m}}_k + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{T^i}{i!}\,\vec{\boldsymbol{s}}_k^{(i)} + \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{m},k}$$

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k + \sum_{i=0}^{N-2} \frac{T^i}{i!}\,\boldsymbol{\omega}_k^{(i)} + \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\theta},k}$$

ed

1. esprimere il vettore di posizione $\vec{\boldsymbol{m}}$ in coordinate Cartesiane
2. esprimere il vettore di velocità $\vec{\boldsymbol{s}}$ e le sue derivate in coordinate coordinate polari

Modello di moto (parte 3)

Il risultato è un nuovo modello che coinvolge non solo $\boldsymbol{s}$ e $\boldsymbol{\omega}$, ma anche

$$\begin{matrix} \dot{\boldsymbol{s}} & \ddot{\boldsymbol{s}} & \dots & \boldsymbol{s}^{(N-1)} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} & \ddot{\boldsymbol{\omega}} & \dots & \boldsymbol{\omega}^{(N-2)} \end{matrix}$$

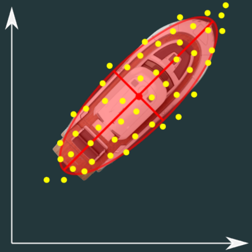
Questo modello, proposto dall'autore, è chiamato *Lambda:Omicron* di *ordine lineare* $\Lambda = N$ ed *ordine angolare* $O = N - 1$ (in breve, modello $N : N - 1$) e può essere generalizzato al caso in cui Λ e O sono arbitrari.

Osservazione: il modello ad uniciclo è un modello Lambda:Omicron con ordine lineare $\Lambda = 1$ e ordine angolare $O = 1$ (modello $1 : 1$).

Idea: l'oggetto genera n misure $y^1, \ldots, y^n$, ognuna delle quali è uniformemente distribuita nell'ellisse di forma e corrotta da rumore Gaussiano additivo $\boldsymbol{v}$.

$$\boldsymbol{y}_k^i = \boldsymbol{m}_k + \boldsymbol{S}_k \boldsymbol{h}_k^i + \boldsymbol{v}_k^i$$
$$\boldsymbol{h}^i \sim \mathcal{U}(C_{0,1})$$
$$\boldsymbol{v}^i \sim \mathcal{N}(0, R)$$
$$i = 1, 2, \ldots, n$$

dove $C_{0,1}$ indica il cerchio di raggio unitario centrato nell'origine



In letteratura, il modello di osservazione considerato prende il nome di *Multiplicative Error Model* (MEM).

- **Stato cinematico**

$$\boldsymbol{r} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}' & \boldsymbol{\lambda}' & \boldsymbol{o}' \end{bmatrix}'$$

$$\boldsymbol{\lambda} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{s} & \dot{\boldsymbol{s}} & \dots & \boldsymbol{s}^{(\Lambda-1)} \end{bmatrix}'$$

$$\boldsymbol{o} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} & \dot{\boldsymbol{\omega}} & \dots & \boldsymbol{\omega}^{(O-1)} \end{bmatrix}'$$

- **Stato di forma**

$$\boldsymbol{p} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} & \boldsymbol{l}' \end{bmatrix}'$$

- **Stato globale**

$$\boldsymbol{x} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}' & \boldsymbol{p}' \end{bmatrix}'$$

Ad ogni istante di campionamento k si stima $\boldsymbol{x}_k \approx \hat{x}_{k|k}$ attraverso due operazioni cicliche:

1. **Predizione**

$$(\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}) \xrightarrow{\text{modellodi moto}} (\hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1})$$

2. **Correzione**

$$(\hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) \xrightarrow{\text{modello di osservazione}} (\hat{x}_{k|k}, P_{k|k})$$

Predizione

Il modello Lambda:Omicron è un modello non lineare della forma

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = f(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{w}_k$$
$$\boldsymbol{w}_k \sim \mathcal{N}(0, Q)$$

Equazioni di predizione (filtro di Kalman esteso)

$$\hat{x}_{k|k-1} \triangleq f(\hat{x}_{k-1|k-1})$$
$$P_{k|k-1} \triangleq \hat{J}_{k-1|k-1} \, P_{k-1|k-1} \, \hat{J}'_{k-1|k-1} + Q$$

dove $\hat{J}_{k-1|k-1}$ è lo Jacobiano di transizione valutato nella precedente stima corretta

$$\hat{J}_{k-1|k-1} \triangleq \left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\hat{x}_{k-1|k-1}}$$

Equazioni di correzione (stimatore BLUE (Best Linear Unbiased Estimator))

$$\hat{r}_{k|k} \triangleq \hat{r}_{k|k-1} + \Sigma_{r\bar{y}}\Sigma_{\bar{y}}^{-1}(\bar{y}_k - \hat{\bar{y}}_{k|k-1})$$
$$P^r_{k|k} \triangleq P^r_{k|k-1} - \Sigma_{r\bar{y}}\Sigma_{\bar{y}}^{-1}\Sigma'_{r\bar{y}}$$

dove:

- $\bar{y}_k$ è la misura media osservata al tempo k

$$\bar{y}_k \triangleq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_k^i$$

- $\hat{\bar{y}}_{k|k-1}$ è la predizione della misura media $\bar{y}_k$

$$\hat{\bar{y}}_{k|k-1} \triangleq \mathbb{E}_{k|k-1}[\bar{y}_k] = \hat{m}_{k|k-1}$$

- $\Sigma_{\bar{y}}$ è la covarianza della misura media $\bar{y}_k$
- $\Sigma_{r\bar{y}}$ è la cross-covarianza tra lo stato cinematico $\boldsymbol{r}_k$ e la misura media $\bar{y}_k$

Equazioni di correzione (stimatore BLUE)

$$\begin{aligned} \hat{p}_{k|k} &\triangleq \hat{p}_{k|k-1} + \Sigma_{p\overline{Y}} \Sigma_{\overline{Y}}^{-1} (\overline{Y}_k - \hat{\overline{Y}}_{k|k-1}) \\ P^p_{k|k} &\triangleq P^p_{k|k-1} - \Sigma_{p\overline{Y}} \Sigma_{\overline{Y}}^{-1} \Sigma'_{p\overline{Y}} \end{aligned}$$

dove:

- $\overline{Y}_k$ è la covarianza empirica dell'insieme di misure osservate al tempo k espressa in forma vettoriale

$$\overline{Y}_k \triangleq \mathrm{vec}\left[\frac{F}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_k^i - \hat{\bar{y}}_{k|k-1})(y_k^i - \hat{\bar{y}}_{k|k-1})' \right]$$

- $\hat{\overline{Y}}_{k|k-1}$ è la predizione (valore atteso) della covarianza empirica $\overline{Y}_k$
- $\Sigma_{\overline{Y}}$ è la covarianza della misura media $\bar{y}_k$
- $\Sigma_{p\overline{Y}}$ è la cross-covarianza tra lo stato di forma $\boldsymbol{p}_k$ e la covarianza empirica $\overline{Y}_k$

LO-MEM vs MEM-EKF*

2:1-MEM
filtro proposto

- **Stato**

$$x \triangleq \left[\begin{array}{ccccc|cc} \xi & \eta & s & \dot{s} & \omega & \theta & l' \end{array}\right]'$$

- **Predizione**
  filtro di Kalman esteso basato sul modello di moto non lineare Lambda:Omicron di ordini $\Lambda = 2$ e $O = 1$

- **Correzione**
  effettuata con 1 passo che processa la misura media $\bar{y}$

CT-NCV MEM-EKF*
[Baum et al., 2018]

- **Stato**

$$x \triangleq \left[\begin{array}{ccccc|cc} \xi & \eta & \dot{\xi} & \dot{\eta} & \omega & \theta & l' \end{array}\right]'$$

- **Predizione**
  filtro di Kalman basato sul modello di moto lineare a velocità (Cartesiana) costante e velocità angolare costante

- **Correzione**
  effettuata in n passi sequenziali che processano (una alla volta) le misure $y^1, \ldots, y^n$

Tracciamento simultaneo di oggetto estesi multipli

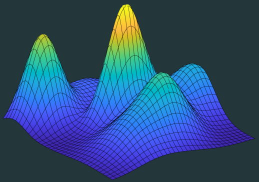
Incertezze

- numero di oggetti
- partizionamento misure
- associazione cluster-oggetto

Non-idealità sensori

- false misure
- occlusioni

PHD (Probability Hypothesis Density): controparte multi-oggetto del concetto di PDF (Probability Density Function). Integra al numero di oggetti in scena ed assume massimi in prossimità dei loro stati.



- **Filtro PHD** [Mahler, 2009]
  1. calcola la PHD predetta $D_{k|k-1}(\cdot)$ e la PHD corretta $D_{k|k}(\cdot)$
  2. stima del numero di oggetti come

$$\hat{N}_{k|k} \triangleq \int D_{k|k}(x) \, \mathrm{d}x$$

  3. stima gli stati degli oggetti tramite i maggiori $\hat{N}_{k|k}$ punti di massimo locali $\hat{x}^1_{k|k}, \ldots, \hat{x}^{\hat{N}}_{k|k}$ della PHD corretta $D_{k|k}(\cdot)$

Il filtro *GM-PHD* (Gaussian Mixture - PHD) [Granstrom et al., 2012] assume che le PHD predetta e corretta siano misture di Gaussiane

PHD predetta

$$D_{k|k-1}(x) = \sum_{i=1}^{\nu_{k|k-1}} w^i_{k|k-1} \mathcal{N}(x; x^i_{k|k-1}, P^i_{k|k-1})$$

PHD corretta

$$D_{k|k}(x) = \sum_{i=1}^{\nu_{k|k}} w^i_{k|k} \mathcal{N}(x; x^i_{k|k}, P^i_{k|k})$$

dove i parametri predetti $\{x^i_{k|k-1}, P^i_{k|k-1}\}_{i=1}^{\nu_{k|k-1}}$ e corretti $\{x^i_{k|k}, P^i_{k|k}\}_{i=1}^{\nu_{k|k-1}}$ sono dati dal particolare filtro per singolo oggetto esteso considerato.

Il filtro LO-MEM possiede le seguenti caratteristiche:

- **(PRO)**: costo computazionale inferiore rispetto il filtro MEM-EKF*
- **(PRO)**: maggiore accuratezza rispetto il filtro MEM-EKF* (sotto oppurtune ipotesi)
- **(PRO)**: implementazione PHD più rigorosa rispetto quella del filtro MEM-EKF*
- **(CONTRO)**: modello di moto non generale
- **(CONTRO)**: numericamente instabile in condizioni di grande incertezza
- **(CONTRO)**: può richiedere tempi di campionamento brevi